



## CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO E ROBUSTO QUANTO À ESTABILIDADE

José Manuel Gonzalez Tubio Perez

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química.

Orientadores: Enrique Luis Lima  
Darci Odloak.

Rio de Janeiro  
Março de 2012

CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO E  
ROBUSTO QUANTO À ESTABILIDADE

José Manuel Gonzalez Tubio Perez

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA QUÍMICA.

Examinada por:

---

Prof. Enrique Luis Lima, D.Sc.

---

Prof. Darci Odloak, Ph.D.

---

Prof. Argimiro Resende Secchi, D. Sc.

---

Prof. Claudio Garcia, D. Sc.

---

Dr. Mario Cesar Mello Massa de Campos

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2012

Perez, José Manuel Gonzalez Tubio

Controle Preditivo Multivariável com modelo de realinhamento e robusto quanto à estabilidade / José Manuel Gonzalez Tubio Perez. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XXII, 219 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Enrique Luis Lima

Darci Odloak

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Química, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 197-201.

1. Controle Preditivo Multivariável. 2. Controle de Processos. 3. Controle Robusto. 4. Modelo em espaço de estado 5. Modelo de realinhamento I. Lima, Enrique Luis et al. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Química. III. Título.

## **Dedicatória**

À minha irmã que sempre me acompanhou na minha trajetória profissional, torcendo por mim e me orientando nos meus primeiros passos.

Ao meu irmão, cuja ausência se faz presente todos os dias, enchendo-me de saudades de sua bondade e sabedoria.

Ao meu pai que, com seu carinho e alegria, me faz viver feliz e amado com sua lembrança.

À minha mãe, exemplo de força e sabedoria, que soube me ensinar a enfrentar com coragem as dificuldades da vida.

A estas pessoas, que me fizeram melhorar como ser humano, dedico este trabalho.

Meus acertos devo a eles, meus erros são de minha única responsabilidade.

## **Agradecimentos**

Aos meus orientadores, Darci e Enrique, por toda a ajuda e paciência que tiveram ao longo do trabalho.

Aos meus sobrinhos, por me darem tantas alegrias e serem tão responsáveis. São exemplos da nova geração.

Aos meus amigos da jornada da vida, pela torcida.

Ao professor Caetano, pela força que me deu para perseverar.

À minha Giane, pela compreensão e paciência por me aturar nos momentos de incertezas.

E, ao mestre Jesus, pela oportunidade de aprendizado e crescimento neste plano material.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

## CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO E ROBUSTO QUANTO À ESTABILIDADE

José Manuel Gonzalez Tubio Perez

Março/2012

Orientadores: Enrique Luis Lima

Darci Odloak

Programa: Engenharia Química

Controladores preditivos multivariáveis são empregados na indústria com o objetivo de reduzir a variabilidade do processo e permitir a operação do mesmo junto às restrições, onde usualmente se encontra o ponto ótimo de operação da unidade de processo. Por conta disso, vários controladores têm sido desenvolvidos com o objetivo de obter algoritmos de melhor performance, mais simples e robustos principalmente quanto ao aspecto de estabilidade.

Neste trabalho, um novo algoritmo de controle robusto é proposto, considerando realimentação de saídas, restrição nas entradas e incerteza de modelo. É um controlador baseado em modelos de espaço de estado e com horizonte de predição infinito, considera incerteza no modelo da parte estável da planta e a existência de polos integradores presentes no processo, polos estes comuns em uma planta industrial devido à necessidade de controle de nível, por exemplo, de alguns equipamentos nestes sistemas. O conceito de estado aqui definido está baseado nas últimas leituras da planta e nas últimas entradas aplicadas e, portanto, é um estado sempre mensurável, o que é conveniente para o estudo da estabilidade e robustez de controladores MPC.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

MULTIVARIABLE PREDICTIVE CONTROLLER USING REALIGNED MODEL AND  
ROBUST BEHAVIOUR

José Manuel Gonzalez Tubio Perez

March/2012

Advisors: Enrique Luis Lima

Darci Odloak

Department: Chemical Engineering

In this work, it is presented a new contribution to the design of a robust MPC with output feedback, input constraints and uncertain model.

Multivariable predictive controllers have been used in the industry with the objective to reduce the variability of the process and to allow the operation of the system near the restrictions, where it is usually located the optimum operating point. For this reason, some controllers have been developed with the objective to produce algorithms with better performance, simpler structure and robust mainly concerning the stability aspect. In this work, a new control algorithm is proposed. It is a model based predictive controller with state space models and with infinite prediction horizon. In the proposed controller it is assumed that there is uncertainty in the stable part of the model, and also includes integrating modes that are frequently present in the process plants. The concept of state here considered is based on the latest measurements of the plant outputs and the control moves implemented in this plant. Therefore the state is always measured, which is convenient to extend the stability results for the closed loop system.

# ÍNDICE

<b><u>I. INTRODUÇÃO</u></b>	<b>1</b>
I.1. MOTIVAÇÃO	1
I.2. OBJETIVO DO TRABALHO	1
I.3. ESTRUTURA DO TEXTO	2
<b><u>II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u></b>	<b>3</b>
II.1. CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL	3
II.2. DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES PREDITIVOS MULTIVARIÁVEIS NA ACADEMIA	8
<b><u>III. CONTROLADOR MPC COM MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA INCREMENTAL</u></b>	<b>19</b>
III.1. MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO POSICIONAL	19
III.2. MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO INCREMENTAL	27
III.3. FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMATIVA DO ESTADO DO SISTEMA	35
III.4. O MPC DE HORIZONTE INFINITO E A ESTABILIDADE GARANTIDA	37
<b><u>IV. CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO</u></b>	<b>44</b>
IV.1. MODELO DE REALINHAMENTO	44
IV.2. MODELO DE REALINHAMENTO NA FORMA INCREMENTAL	46
<b><u>V. IHMPC COM MODELO DE REALINHAMENTO PARA SISTEMAS ESTÁVEIS</u></b>	<b>52</b>
V.1. INTRODUÇÃO	52
V.2. TRANSFORMAÇÃO E PREDIÇÃO DE ESTADOS	52
V.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC	54
V.4. RESTRIÇÕES DO IHMPC	61
V.5. IHMPC ESTENDIDO COM MODELO DE REALINHAMENTO	62



V.6. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS E PARA O CASO NOMINAL	69
V.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	72

**VI. IHMPC ROBUSTO COM FEEDBACK DE SAÍDA APLICADO APENAS A PROCESSOS COM POLOS ESTÁVEIS E INCERTEZA DE MODELO** **77**

VI.1. INTRODUÇÃO	77
VI.2. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC ROBUSTO	81
VI.3. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS E PARA O CASO ROBUSTO	87
VI.4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	91

**VII. IHMPC COM FEEDBACK DE SAÍDA PARA PROCESSOS INTEGRADORES PUROS COM OU SEM TEMPO MORTO** **96**

VII.1. INTRODUÇÃO	96
VII.2. MODELO DE PROCESSO	96
VII.3. FUNÇÃO OBJETIVO	98
VII.4. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS INTEGRADORES PUROS	106
VII.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	112

**VIII. IHMPC COM FEEDBACK DE SAÍDA ESTENDIDO A PROCESSOS COM POLOS INTEGRADORES E POLOS ESTÁVEIS** **117**

VIII.1. INTRODUÇÃO	117
VIII.2. MODELO DE PROCESSO CONSIDERADO PELO IHMPC	117
VIII.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC	119
VIII.4. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO CONSIDERADO PELO IHMPC NOMINAL ESTÁVEL E INTEGRADOR	125
VIII.5. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS CASO NOMINAL E INTEGRADORES	126
VIII.6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	131

**IX. IHRMPC ROBUSTO COM FEEDBACK DE SAÍDA ESTENDIDO A PROCESSOS COM POLOS INTEGRADORES E POLOS ESTÁVEIS** **135**

IX.1. INTRODUÇÃO	135
IX.2. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC ROBUSTO	137
IX.3. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO CONSIDERADO PELO IHMPC ROBUSTO	145
IX.4. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHRMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS CASO ROBUSTO E INTEGRADORES	146
IX.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	154

## **X. UTILIZAÇÃO DO MPC ROBUSTO COM SIMULADOR DINÂMICO DE PROCESSO** **164**

X.1. OBJETIVO	164
X.2. HISTÓRICO E CARACTERÍSTICAS DO EMSO	164
X.3. MODELO DO TAMBOR DE FLASH	164
X.4. MALHA FECHADA TAMBOR DE FLASH E IHRMPC	180
X.5. COMPARAÇÃO DOS CONTROLADORES IHRMPC E PID NO TAMBOR DE FLASH	186

## **XI. CONCLUSÕES** **195**

XI.1. CONTROLADOR PREDITIVO MULTIVARIÁVEL ROBUSTO	195
XI.2. CONTRIBUIÇÕES DESTE TRABALHO	195
XI.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	196

## **XII. BIBLIOGRAFIA** **197**

## **XIII. ANEXO I – PROPRIEDADES DA MATRIZ DE ESTADO DO MODELO INCREMENTAL** **202**

A-I.1. INTRODUÇÃO	202
A-I.2. PROPRIEDADE 1 – COMPORTAMENTO DA MATRIZ DE ESTADO DO MODELO DE REALINHAMENTO AO LONGO DO HORIZONTE DE PREDIÇÃO	202
A-I.3. PROPRIEDADE 2 – TRANSFORMAÇÃO DE ESTADOS	205
A-I.4. DEFINIÇÃO DE UM NOVO ESTADO	208
A-I.5. PREDIÇÃO DO ESTADO TRANSFORMADO Z	209
A-I.6. PROPRIEDADE 3 – PREDIÇÃO APÓS O HORIZONTE DE CONTROLE ESTENDIDO	210

A-I.7. PROPRIEDADE 4	212
A-I.8. PROPRIEDADE 5	212

**XIV. ANEXO II - FLUXOGRAMA DO CONTROLADOR PREDITIVO MULTIVARIÁVEL  
DE HORIZONTE INIFINITO CONSIDERANDO INCERTEZA NOS POLOS ESTÁVEIS  
E A EXISTÊNCIA DE POLOS INTEGRADORES** **215**

A-I.9. INTRODUÇÃO	215
-------------------	-----

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura II-1– Exemplo de interação do MPC com o sistema regulatório .....	3
Figura II-2– Sistema de Controle com MPC .....	4
Figura II-3– Atuação de um MPC com horizonte de controle $m$ e de predição $np$ .....	6
Figura II-4– Janela Operacional de duas variáveis manipuladas .....	7
Figura V-1– Coluna de separação de isobutano .....	73
Figura V-2– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável .....	75
Figura V-3– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável.....	75
Figura V-4– Comportamento da função objetivo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável.....	76
Figura VI-1– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHRMPC - caso planta estável .....	93
Figura VI-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do RIHMPC - caso planta estável .....	93
Figura VI-3– Comportamento da função objetivo da planta frente a um degrau unitário no set point do IHMPC nominal e robusto - caso planta estável .....	94
Figura VI-4– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHMPC robusto - caso planta estável.....	94
Figura VI-5– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC robusto - caso planta estável .....	95
Figura VII-1– Resposta da saída a um degrau unitário em -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro .....	114
Figura VII-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário de -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro .....	114
Figura VII-3– Comportamento da função objetivo do problema B frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta integrador puro .....	115
Figura VII-4– Resposta da saída a um degrau unitário em -1 no set point do IHMPC -	

caso planta integrador puro com tempo morto.....	115
Figura VII-5– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário de -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro com tempo morto .....	116
Figura VII-6– Comportamento da função objetivo do problema B frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta integrador puro com tempo morto	116
Figura VIII-1– Resposta da saída a um degrau unitário nos set points do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores.....	133
Figura VIII-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário nos set points do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores.....	133
Figura VIII-3– Comportamento da função objetivo do problema A de otimização do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores.....	134
Figura VIII-4– Comportamento da função objetivo do problema B de otimização do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores.....	134
Figura IX-1– Comparação das respostas das saídas frente a um degrau unitário nos set points do IHRMPC robusto e IHMPC nominal - caso planta com polos estáveis e polos integradores .....	155
Figura IX-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo no IHRMPC robusto e IHMPC nominal.....	156
Figura IX-3– Comportamento da função objetivo do problema A de otimização do IHRMPC robusto e IHMPC nominal.....	156
Figura IX-4– Comportamento da função objetivo do problema B de otimização do IHRMPC robusto e IHMPC nominal.....	157
Figura IX-5– Comparação das resposta das saídas a um degrau unitário nos set points do IHMPC e do IHRMPC – caso nominal.....	158
Figura IX-6– Resposta das entradas aplicadas ao processo do IHMPC e do IHRMPC – caso nominal .....	158
Figura IX-7– Função objetivo do problema A de otimização do IHMPC e do IHRMPC .....	159
Figura IX-8– Função objetivo do problema B do IHMPC x IHRMPC .....	159
Figura IX-9– Respostas das saídas a um degrau unitário nos set points do IHRMPC	

com incerteza de modelo - caso robusto.....	160
Figura IX-10– Respostas das entradas a um degrau unitário nos set points do IHRMPC com incerteza de modelo - caso robusto.....	160
Figura IX-11– Respostas das saídas do IHMPC e do IHRMPC - caso modelo diferente do nominal.....	161
Figura IX-12– Comportamento das entradas aplicadas ao processo do IHMPC e do IHRMPC - caso modelo diferente do nominal.....	162
Figura IX-13– Respostas das saídas ao problema servo do IHRMPC – Caso saturação da entrada $u_2$ .....	162
Figura IX-14– Comportamento das entradas ao problema servo do IHRMPC– Caso saturação da entrada $u_2$ .....	163
Figura IX-15– Função Objetivo do problema B do IHRMPC – Caso saturação da entrada $u_2$ .....	163
Figura X-1– Fluxograma de controle do tambor de Flash.....	165
Figura X-2– Ambiente simulink para identificação do modelo do processo para a variável manipulada vazão de vapor.....	166
Figura X-3– Resposta das variáveis controladas às variações aplicadas à vazão de retirada de vapor.....	167
Figura X-4– Resposta das variáveis controladas às variações aplicadas à vazão de retirada de líquido.....	167
Figura X-5– Resposta das variáveis controladas a um degrau positivo na vazão de vapor.....	168
Figura X-6– Resposta das variáveis controladas a um degrau negativo na vazão de vapor.....	169
Figura X-7– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo A e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor.....	170
Figura X-8– Comparação da resposta da variável Nível Modelo A e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor.....	171
Figura X-9– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo B e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor.....	171
Figura X-10– Comparação da resposta da variável Nível Modelo B e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor.....	172

Figura X-11– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo A e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor.....	172
Figura X-12– Comparação da variável Nível Modelo A e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor .....	173
Figura X-13– Comparação da variável Pressão Modelo B a um degrau negativo na vazão de vapor .....	173
Figura X-14– Comparação da resposta da variável Nível Modelo B e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor.....	174
Figura X-15– Excitação aplicada na vazão de vapor.....	175
Figura X-16– Resposta da variável controlada Pressão para o modelo A à excitação na vazão de vapor .....	175
Figura X-17– Resposta da variável controlada Nível para o modelo A à excitação na vazão de vapor .....	176
Figura X-18– Resposta da variável controlada Pressão para o modelo B á excitação na vazão de vapor .....	176
Figura X-19– Resposta da variável controlada Nível para o modelo B à excitação na vazão de vapor .....	177
Figura X-20– Resposta das variáveis controladas para uma excitação na vazão de líquido.....	178
Figura X-21– Comparação entre o modelo linear obtido e a resposta do simulador EMSO a um degrau negativo na vazão de retirada de líquido .....	179
Figura X-22– Comparação entre o modelo linear obtido e a resposta do simulador EMSO a um degrau negativo na vazão de retirada de líquido .....	180
Figura X-23– Resposta do modelo com controlador IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão.....	183
Figura X-24– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão.....	183
Figura X-25– Resposta do modelo com controlador IHRMPC do nível e da pressão frente a uma perturbação na vazão de carga de 20%.....	184
Figura X-26– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador IHRMPC frente a uma perturbação na vazão de carga de 20%.....	184
Figura X-27– Resposta do modelo com controlador IHRMPC frente a uma perturbação	

na temperatura de carga de 10%.....	185
Figura X-28– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10% .....	185
Figura X-29– Comparação das respostas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão.....	188
Figura X-30– Comparação do comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão.....	189
Figura X-31– Resposta do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10%.....	189
Figura X-32– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e do IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10% .....	190
Figura X-33– Resposta do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na carga de 20% de vazão e de 10% na temperatura.....	190
Figura X-34– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na carga de 20% na vazão e de 10%na temperatura.....	191
Figura X-35– Comportamento das variáveis controladas com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo prevista pelo IHRMPC.....	192
Figura X-36– Resposta das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo prevista pelo IHRMPC.....	193
Figura X-37– Resposta das variáveis controladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo não prevista pelo IHRMPC.....	193
Figura X-38– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo não prevista pelo IHRMPC .....	194



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela V-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo estável .....	74
Tabela VI-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo estável .....	92
Tabela VII-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo integrador puro .....	113
Tabela VIII-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para o processo .....	132
Tabela IX-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para o processo .....	154
Tabela X-1 – Parâmetros de sintonia do IHRMPC para o tambor de flash.....	181
Tabela X-2 – Parâmetros de sintonia dos PIDs para o tambor de flash .....	186

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$  - Matriz de estados

$A_d$  - Matriz diagonal com os autovalores da matriz  $A_y$

$A_y$  - Matriz componente da matriz de estados, associada às saídas do processo, que auxilia no cálculo do próximo estado na parte referente às leituras das saídas passadas da planta

$A_{y,s}$  - Matriz componente da matriz de estados associada às saídas estáveis do processo com mesma função de  $A_y$

$A_{\Delta u}$  - Matriz componente da matriz de estados, associada às entradas do processo, que auxilia no cálculo do próximo estado na parte referente às entradas passadas aplicadas à planta.

$A_{\Delta u,s}$  - Matriz componente da matriz de estados do modelo estável, associada às entradas do processo, com a mesma função de  $A_{\Delta u}$ .

$B$  – Matriz de entradas.

$B_{\Delta u}$  - Matriz componente da matriz de entrada que calcula o novo estado a partir das entradas aplicadas no instante atual ao processo.

$B_{\Delta u,s}$  - Matriz componente da matriz de entrada do modelo estável com a mesma função de  $B_{\Delta u}$ .

$C$  – Matriz de saídas

$C_y$  - Matriz componente da matriz de saídas que recupera as saídas atuais a partir do estado corrente

$C_{ys}$  - Matriz componente da matriz de saídas estáveis que recupera as saídas atuais estáveis a partir do estado corrente

$C_{\Delta u}$  - Matriz componente da matriz de saídas que recupera as saídas passadas a partir do estado corrente. É nulo.

$C_{\Delta u,s}$  - Matriz componente da matriz de saídas estáveis que recupera as saídas

passadas estáveis a partir do estado corrente. É nulo.

$F^{st}$  - Matriz diagonal com os autovalores estáveis da matriz  $A_d$

$F^{st}(\theta_p)$  - Matriz diagonal com os autovalores estáveis da matriz  $A_d$  para cada modelo

$\theta_p$  considerado

$IC$  - Índice de desempenho representando o somatório dos erros de estimação normalizados elevado ao quadrado

$m$  - Horizonte de controle do controlador

$n$  - Horizonte de controle estendido  $n = m + nb - 1$

$na$  - ordem do modelo com referência às saídas integradoras do processo

$na_s$  - ordem do modelo com referência às saídas estáveis do processo

$nb$  - ordem do modelo integrador com referência às entradas do processo

$nb_s$  - ordem do modelo estável com referência às entradas do processo

$nu$  - número de variáveis manipuladas

$ny$  - número de saídas integradoras controladas

$ny_s$  - número de saídas estáveis controladas

$nx$  - dimensão do estado do modelo integrador

$nx_s$  - dimensão do estado do modelo estável

$p$  - dimensão de um estado genérico

$Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas integradoras

$Q_s$  - Matriz de peso das variáveis controladas estáveis

$R$  - Matriz de supressão de movimento das variáveis manipuladas

$S$  - Matriz de peso das folgas associadas aos polos integradores do modelo incremental

$S_1$  - Matriz de peso das folgas associadas aos polos integradores do modelo incremental do sistema integrador

$S_{1,s}$  - Matriz de peso das folgas associadas aos polos integradores do modelo incremental do sistema estável

$S_2$  - Matriz de peso das folgas associadas aos polos integradores do processo

$T_{sim}$  – Tempo de simulação

$u^{ss}$  – Valor em estado estacionário da variável manipulada

$V$  – Matriz de autovetores da matriz  $A_y$

$V^i$  – Matriz de autovetores integradores da matriz  $A_y$

$V^{st}$  – Matriz de autovetores estáveis da matriz  $A_y$

$V_{in}$  – Matriz inversa de  $V$

$V_{in}^i$  - Matriz inversa da matriz dos autovetores integradores da matriz  $A_y$

$V_{in}^{st}$  - Matriz inversa da matriz dos autovetores estáveis da matriz  $A_y$

$V_1^i$  - Componente do autovetor 1 associado aos polos integradores do processo

$V_1^{is}$  - Componente do autovetor 1 associado aos polos integradores do modelo

$V_2^i$  - Componente do autovetor 2 associado aos polos integradores do processo

$V_2^{is}$  - Componente do autovetor 2 associado aos polos integradores do modelo

$x$  – Estado do processo

$x(k+1|k)$  - Predição para o instante  $k+1$  do estado  $x$  no instante  $k$

$x_y$  - Componente do estado referente às saídas passadas e a saída atual

$x_{y,s}$  - Componente do estado referente às saídas passadas e a saída atual com modelo estável

$x_{\theta p}$  - Predição do estado considerando um dado modelo  $\theta_p$ . Também representado por  $x(\theta p)$

$x_{\Delta u}$  - Componente do estado referente às entradas passadas

$x_{\Delta u,s}$  - Componente do estado das saídas estáveis referente às entradas passadas

$x_y^{sp}$  - *Set point* referente às saídas do processo de dimensão  $na+1$

$y^{ss}$  - Valor em estado estacionário da variável controlada

$y_p$  - Valor estimado por um modelo linear da variável controlada

$y^{sp}$  - *Set point* referente às saídas do processo

$y_s^{sp}$  - *Set point* referente às saídas da parte estável do processo

$z$  – Estado transformado onde é possível a separação de polos instáveis dos polos estáveis

$z^i$  - Estado transformado contendo apenas os polos integradores do modelo incremental

$z^i(k+n|k)$  - Predição para o instante  $n$  feita no instante  $k$  para a parte integradora do processo no estado transformado  $z$

$z^{is}(k+n|k)$  - Predição para o instante  $n$  feita no instante  $k$  para a parte integradora do modelo no estado transformado  $z$

$z^{st}$  - Estado transformado contendo apenas os polos estáveis do processo

$z_{\theta_p}$  - Estado modificado  $z$  considerando um dado modelo  $\theta_p$  de processo. Também representado por  $z(\theta_p)$

$z_s^i$  - Modo integrador da parte estável do processo

$\Delta u^*$  - Valor ótimo das entradas de processo no problema de otimização

$\delta_k^*$  - Valor ótimo das folgas no problema de otimização

$\delta_k$  - Folgas no instante  $k$  no problema de otimização para os polos integradores que surgem no modelo incremental

$\delta_{k,s}$  - Folgas no instante  $k$  no problema de otimização para os polos integradores que surgem no modelo incremental de um processo estável

$\delta_k^i$  - Folgas no instante  $k$  no problema de otimização para os polos integradores do processo

$\theta$  - Tempo morto de processo

$\theta_p$  - Modelo  $p$  do processo

$\tau$  - Constante de tempo do processo

## Nomenclatura

DMC – Dynamic Matrix Control

EMSO – Environment for Modeling Simulation and Optimization

IHMPC – Infinitive Horizon Model Predictive Controller

IHRMPC – Infinitive Horizon Robust Model Predictive Controller

LDMC – Linear Dynamic Matrix Control

LIC – Controlador e indicador de nível

LMI – Linear Matrix Inequality

LP – Linear Programming

MIMO – Multiple Input Multiple Output

MISO – Multiple Input Single Output

MPC – Model Predictive Control

NMPC – Non Linear Model Predictive Control

OPOM – Output Prediction Oriented Model

PID – Controlador Proporcional Integral Derivativo

PIC – Controlador e indicador de pressão

QDMC – Quadratic Dynamic Matrix Control

QP – Quadratic Programming

SICON – Sistema de Controle Preditivo desenvolvido na Petrobras

SISO – Single Input Single Output

# I. INTRODUÇÃO

---

## I.1. MOTIVAÇÃO

O controle preditivo multivariável foi desenvolvido em torno de 1970 com o objetivo de minimizar os problemas de interação que ocorriam no nível do controle regulatório entre as malhas de controle, resolver os problemas de restrições atingidas no processo, principalmente nas variáveis manipuladas, e reduzir a variabilidade do processo em torno dos valores desejados. De lá para cá, uma série de novas propostas para a implementação de um controlador preditivo foram desenvolvidas pela academia, no sentido de melhorar e resolver os problemas encontrados nos controladores utilizados na indústria. Um dos requisitos que sempre é almejado é a busca de uma estabilidade no controle preditivo, independente de variações que possam ocorrer no modelo real da unidade de processo ao longo do seu tempo de campanha.

A Petrobras tem utilizado, como controlador, o SICON, um MPC baseado em modelo de resposta ao degrau, similar ao DMC proposto por CUTLER e RAMAKER (1979). Como desvantagem deste modelo, tem-se matrizes de grandes dimensões, modelos representados por um número excessivo de parâmetros e uma estabilidade não garantida, principalmente quando o processo sofre alterações com o tempo.

PEREZ (2006) utilizou um conceito de modelo incremental baseado nas últimas leituras de saída e de entrada do processo. Este modelo traz como grande vantagem o fato do estado ser sempre medido. No entanto, o controlador desenvolvido naquele trabalho é de horizonte finito. RAWLINGS e MUSKE (1993) mostram que um controlador de horizonte infinito é estável para o problema nominal onde o modelo do processo é perfeitamente conhecido. Isto torna o uso de controladores de horizonte infinito bastante atraente.

## I.2. OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um controlador de horizonte infinito baseado no modelo proposto por PEREZ (2006). Neste controlador devem ser incluídas restrições nas entradas, incertezas nos parâmetros associados à parte

estável do modelo e a existência de polos integradores no processo. Como, na prática, os parâmetros associados a polos integradores não estão sujeitos a grandes incertezas, o estudo será limitado às incertezas ligadas apenas aos polos estáveis. Também faz parte do objetivo deste trabalho obter as provas de estabilidade do controlador obtido e verificar seu desempenho no controle de uma planta realista obtida via simulação rigorosa.

### **I.3. ESTRUTURA DO TEXTO**

Ao longo deste capítulo foram apresentadas a motivação e o objetivo deste trabalho. O capítulo II apresentará uma revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados a este estudo. O capítulo III mostrará uma revisão sobre modelos em espaço de estado e a vantagem de considerar as variáveis de estado na forma incremental. No capítulo IV será apresentada uma revisão do modelo proposto por MACIEJOWSKI (2002) e aprimorado por PEREZ (2006). O anexo I, relacionado a este capítulo, apresentará algumas propriedades deste modelo que serão úteis no desenvolvimento do controlador proposto. No capítulo V será apresentado o controlador de horizonte de predição infinito, com o modelo na forma incremental proposto por PEREZ (2006), com polos estáveis, sem incerteza nos parâmetros. No capítulo VI será apresentado o mesmo controlador considerando incerteza de modelo e, ainda, a existência apenas de polos estáveis no processo. No capítulo VII será desenvolvido o controlador para um processo integrador puro. O capítulo VIII fará a proposta de um controlador que considere a existência de polos integradores e de polos estáveis no processo para o caso nominal, ou seja, sem incerteza de modelo. O capítulo IX apresentará o controlador na forma final deste trabalho, considerando polos integradores e polos estáveis, com incerteza de parâmetros na parte estável do modelo. Ao longo do trabalho, serão apresentados exemplos da performance obtida pelos controladores, considerando como planta o modelo de função de transferência de um reator de produção de oxiteno, localizado em uma unidade industrial. No capítulo X o controlador é testado utilizando um simulador rigoroso e comparado com dois controladores lineares PID. Por fim, o capítulo XI apresentará as conclusões preliminares deste trabalho e sugestões para a continuidade do mesmo.



## II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

### II.1. CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL

O Controle Preditivo Multivariável (MPC) tem sido bastante aplicado na indústria. A literatura e publicações correlacionadas ao assunto mostram o desenvolvimento desta aplicação em diversos segmentos. Os ganhos obtidos com esta aplicação podem ser observados em termos de variabilidade das variáveis controladas e, conseqüentemente, maior aproximação do ponto operacional com relação às restrições. A Figura II-1 mostra um exemplo simples de como interagem o controle preditivo com o controle regulatório. Nesta figura está representada apenas uma das variáveis controladas e manipuladas do MPC, dentro de um conjunto maior destas variáveis. Para fazer esta distinção do escopo completo do MPC, foi definida esta pequena região de manipuladas e controladas como CA, para diferenciar da atuação completa de um controlador preditivo multivariável.

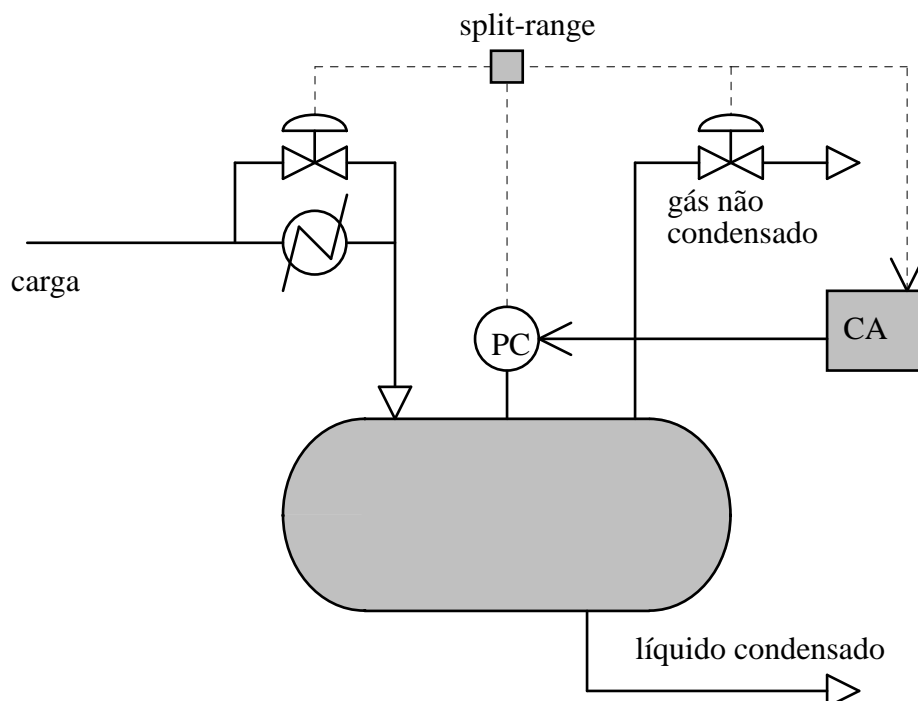


Figura II-1– Exemplo de interação do MPC com o sistema regulatório

As principais motivações que levam ao uso do MPC são em sistemas com grande interação entre as variáveis controladas, sistemas com dinâmicas complexas, sistemas de fase não mínima ou com tempos mortos grandes. Outra grande motivação para o uso do MPC é a existência de uma camada de otimização para buscar o ponto ótimo de operação da unidade, camada esta que já se encontra inserida dentro do MPC nas soluções comerciais. Essa camada de otimização dispensa o operador de se preocupar com o set point desejado para as variáveis controladas, bastando definir uma região aceitável para a operação da unidade.

A Figura II-2 mostra a interação entre o operador e o sistema de controle, constituído por um .MPC e o sistema regulatório.

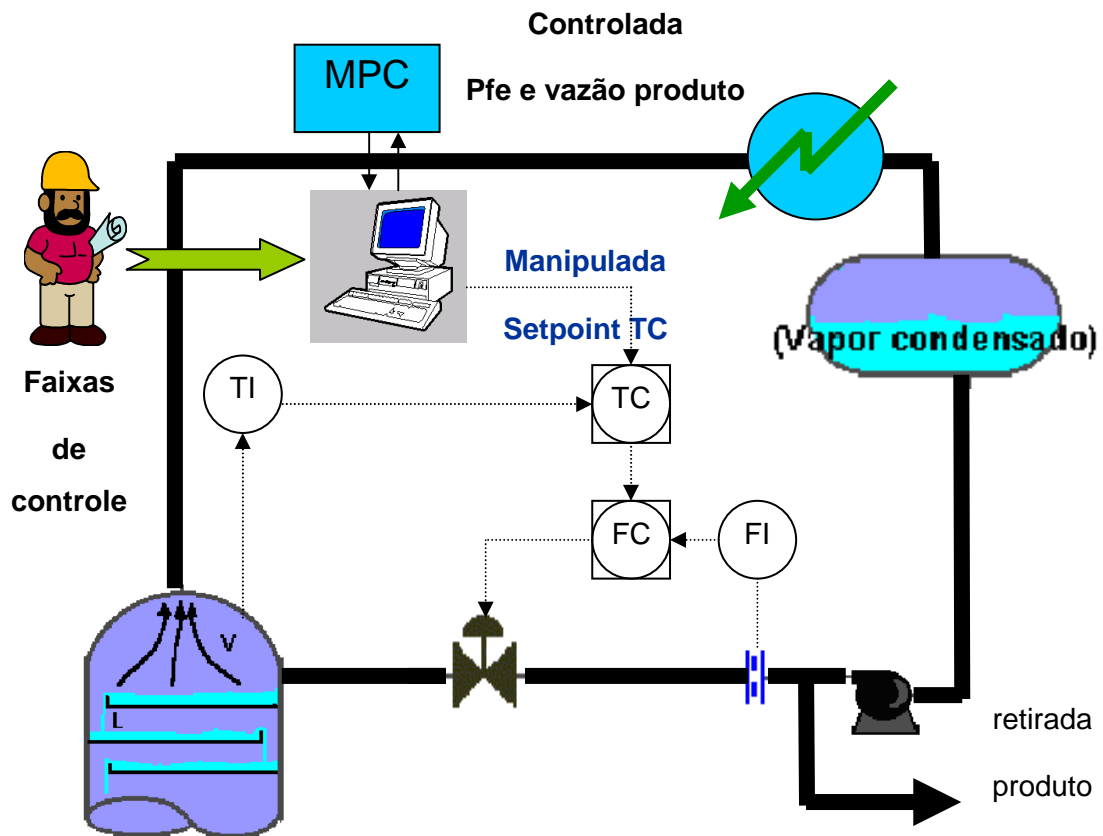


Figura II-2– Sistema de Controle com MPC

O MPC, na abordagem prática, tem sido utilizado, como já mencionado, em controle de processos com um grande acoplamento entre as malhas de controle. Empresas na

indústria do petróleo têm diversas aplicações de colunas de separação com uma forte interação entre as temperaturas de fundo e de topo, tal como a desbutanizadora. Este problema tem sido resolvido com o uso do MPC. Esta vantagem do MPC sobre o controle regulatório se deve ao fato do primeiro realizar uma predição, dentro de um intervalo de tempo, definido como horizonte de predição, das variáveis controladas e conhecer, através de modelos, como se procede a interação das ações das variáveis manipuladas sobre as variáveis controladas da planta, ou seja, quanto uma alteração em determinada variável manipulada afeta as variáveis controladas em questão.

Outra grande vantagem do MPC sobre o controle regulatório clássico é a possibilidade da inclusão de restrições nas variáveis manipuladas, tais como a magnitude de abertura de válvula, limitação de velocidade de abertura, etc. e de restrições sobre as variáveis controladas que, quando não precisam de um valor definido de controle, podem permanecer dentro de determinadas regiões, no que normalmente é chamado de controle por faixa, conforme pode ser visto na Figura II-2. A vantagem do uso do controle por faixas está na liberação das variáveis manipuladas para atuarem sobre as variáveis controladas que se encontram próximas às vizinhanças dos valores máximos ou mínimos permitidos.

A essência do MPC é determinar um conjunto de ações sobre as variáveis manipuladas dentro de um horizonte de controle para otimizar o somatório de erros quadráticos das variáveis controladas, dentro de um horizonte de predição. A leitura da planta é utilizada para ajustar a predição com os valores reais obtidos.

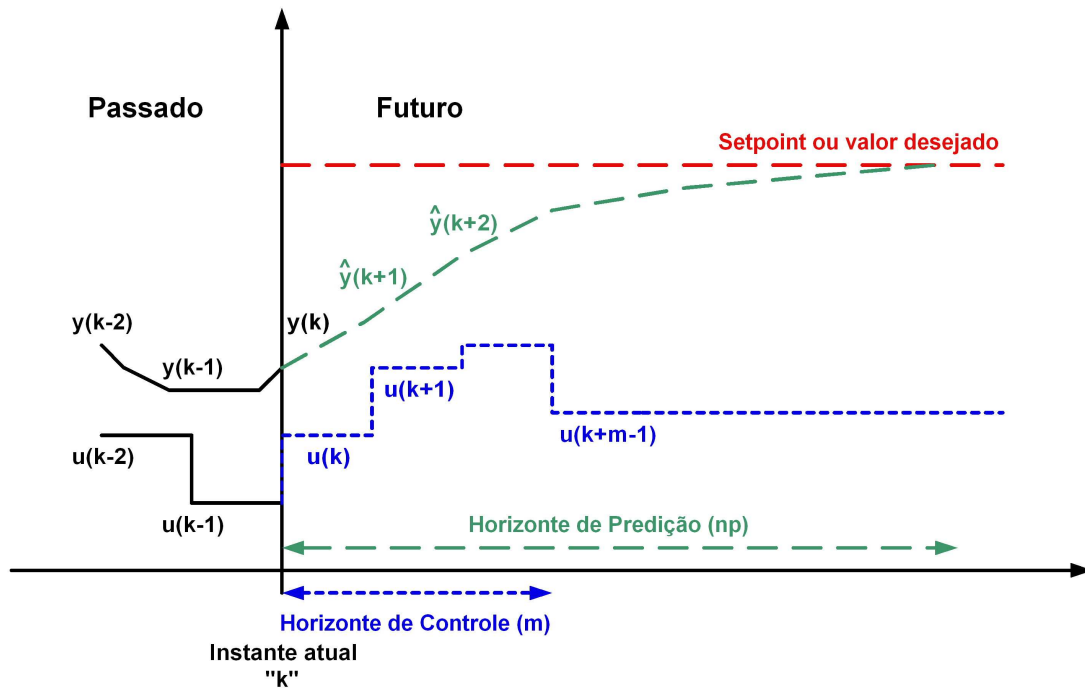
### ***II.1.1. Algoritmo básico de um MPC***

As seguintes etapas podem ser observadas no algoritmo de um MPC:

- a. Através de um modelo implementado no controlador, o MPC é capaz de realizar a predição do comportamento da saída do processo, levando em consideração as entradas de controle atuais e futuras.
- b. Esta predição deve ser corrigida, a cada intervalo de tempo, por uma leitura da planta. Um MPC opera em plantas petroquímicas, tipicamente, com intervalos de tempo na faixa de um minuto.
- c. Em cada iteração, o controlador calcula uma sequência de ações de controle. O tamanho desta sequência corresponde ao horizonte de controle. Esta sequência calculada minimiza a função do erro das saídas previstas até o horizonte de predição.

- d. Após resolver o problema de otimização descrito no item c, o controlador aplica na planta apenas a primeira ação de controle dentre a sequência de ações calculadas do instante atual até o intervalo correspondente ao horizonte de controle.
- e. O controlador aguarda o próximo intervalo de tempo para retornar ao item a.

A Figura II-3 mostra a atuação do MPC para um problema SISO, de horizonte de controle  $m$  e de horizonte de predição  $np$ .



**Figura II-3– Atuação de um MPC com horizonte de controle  $m$  e de predição  $np$**

Na abordagem do MPC, o tempo é discretizado. No instante  $k$ , existe um determinado *set point* da variável controlada  $y$ , que pode ter sido mudado neste instante ou ser consequência de mudança em um tempo anterior. Em função do erro existente entre este *set point* e a variável controlada, o MPC calcula as  $m$  ações de controle que minimizam o somatório dos quadrados dos erros preditos até o horizonte de predição  $np$  da variável controlada. Após calcular esta sequência de ações sobre a planta, apenas a ação  $u(k)$  é aplicada ao processo. Até o instante  $k+1$  seguinte, o controlador MPC, devido à implementação discretizada, mantém o último valor de saída calculado durante este intervalo.

No intervalo  $k+1$ , atualiza-se a predição com o valor lido da planta. A diferença existente entre o valor da predição e o obtido da planta se deve à diferença existente entre a planta real e o modelo de predição do controlador. Também pode ser

justificado pela existência de perturbações que possam ocorrer sobre o processo, afetando à variável controlada. Após a correção da predição, novas  $m$  ações de controle são calculadas visando o mínimo da soma dos erros ao quadrado.

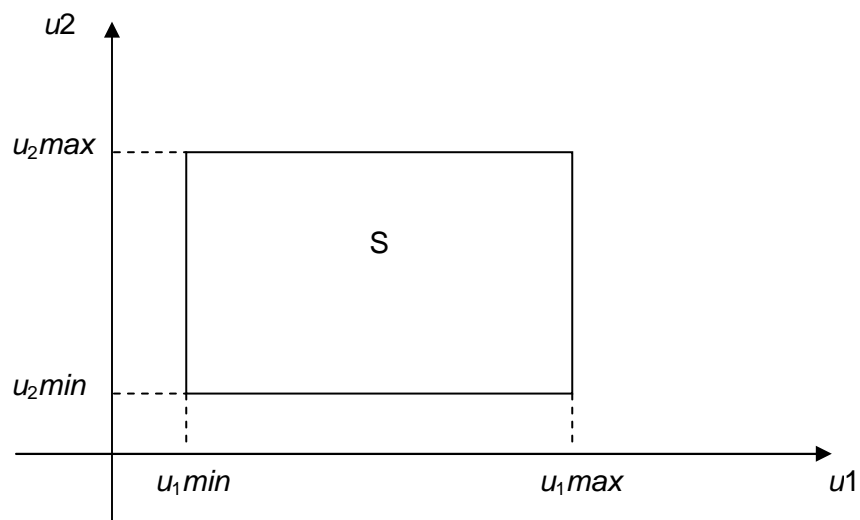
Na literatura sobre o MPC, encontram-se as seguintes definições:

- a) Tempo de estabilização da planta ( $N$ ): É o tempo que a planta estabiliza para uma perturbação em degrau aplicada na sua entrada.
- b) Horizonte de Predição ( $np$ ): É o intervalo de tempo em que as variáveis de saída são preditas pelo controlador.
- c) Horizonte de Controle ( $m$ ): É o horizonte de cálculo das variáveis de entrada do processo.

Os dois últimos parâmetros são sintonizáveis. Quanto maior o horizonte de predição, maior suavidade no controle. Quanto maior o horizonte de controle, mais rápida é a resposta do controlador em relação às variáveis controladas, mais suave a manipulação das variáveis de entrada do sistema e maior esforço computacional é requerido.

### **II.1.2. Região viável de operação**

Um processo está sujeito a restrições em suas entradas devido a limitações de abertura de válvulas, de cargas térmicas de equipamentos, de máxima temperatura admissível, etc. A Figura II-4 mostra uma região viável de um controlador com duas variáveis manipuladas,  $u_1$  e  $u_2$ , com restrições nos seus valores.



**Figura II-4– Janela Operacional de duas variáveis manipuladas**

Considerando um objetivo de otimização linear (LP), o ótimo deste problema encontra-se nas extremidades da região viável  $S$ . Um controlador PID convencional, que manipula apenas uma variável, permitiria um desvio permanente entre *set point* e valor da variável controlada, pois perderia a sua única variável de manipulação. O uso da estratégia de *split-range*, se aplicável, tem conhecidos problemas de desempenho da malha de controle fechada, tendo em vista que as diferentes válvulas utilizadas determinam ganhos de processo diferentes.

Os controladores preditivos multivariáveis visam à solução destes problemas não resolvidos pelo controle clássico, também chamado de controle regulatório.

CAMACHO e BORDONS (2004) apontam como as principais razões para o uso do MPC na indústria: a capacidade de lidar com problemas multivariáveis, operar com as restrições de processo respeitadas e a capacidade preditiva facilitando a aplicação em processos com tempo morto comparável com sua constante de tempo, segundo a relação  $\theta/\tau$ .

## **II.2. DESENVOLVIMENTO DE CONTROLADORES PREDITIVOS MULTIVARIÁVEIS NA ACADEMIA**

Como mencionado anteriormente, os controladores preditivos têm sido aplicados no ambiente industrial e acadêmico devido, principalmente, à sua habilidade de incorporar restrições nas entradas e saídas. Este aspecto é importante para o sucesso de uma implementação em controle de processos, visto que estes sistemas, na prática, apresentam limites físicos nas variáveis de processo, impostos por restrições nas variáveis manipuladas ou controladas, ou, ainda, por políticas operacionais. RICHLET (1993), GARCIA, PRETT e MORARI (1989) e MUSKE e RAWLINGS (1993) mostram as vantagens do MPC sobre os controladores convencionais, indicando que sistemas de processo que apresentem grandes tempos mortos ou sistemas de fase não mínima são processos com uma melhor performance de controle com o uso do MPC.

Nas últimas décadas, foi desenvolvida uma base teórica para o MPC que permitiu a obtenção de leis de controle preditivo com garantias de estabilidade nas aplicações industriais. QIN & BADGWELL (2000) destacam diversas aplicações industriais do controlador preditivo multivariável, inclusive tratando com não linearidades de processo. RODRIGUES (2001) enfatiza a importância da estabilidade dos controladores preditivos.

A literatura sobre MPC também destaca que a inclusão de restrições no controlador incorpora não linearidades ao problema de otimização no momento em que estas restrições estão ativas. Isto obriga a utilização de ferramentas mais complexas para a síntese de controladores preditivos com restrições, o que requer uma elevada demanda computacional em tempo real.

BITMEAD *et al.* (1990) destacaram o problema de estabilidade para o controlador preditivo multivariável de horizonte finito.

RAWLINGS e MUSKE (1993) apresentaram uma proposta para tornar o MPC estável para um horizonte de predição infinito. Esta estabilidade foi provada para o caso nominal, caso em que o modelo real da planta de processo coincide com o modelo considerado pelo controlador.

MICHALSKA e MAYNE (1993) apresentaram um MPC dual de horizonte finito onde as ações de controle são geradas a partir de um problema de otimização com as restrições relaxadas através de inequações, ao invés do uso de equações, que tornavam o problema de difícil convergência.

BADGWELL (1997) propôs um controlador robusto para o problema regulador de sistemas estáveis admitindo incerteza no modelo do processo. Mais tarde, o método seria estendido para o problema servo por RODRIGUES e ODLOAK (2003a) e para sistemas com polos integradores por GONZÁLEZ, ODLOAK e MARCHETTI (2007). Os autores propõem, nestes trabalhos, acrescentar ao problema de otimização uma restrição que garanta a contração da função custo do problema.

LEE e YU (1997) apresentaram um controlador robusto que minimiza a função objetivo aplicada ao pior caso dos modelos disponíveis no controlador. Para isso, a função objetivo do controlador considerava todos os modelos possíveis que a planta podia apresentar. Isso era feito por algoritmo Min-Max. A principal desvantagem deste controlador foi o baixo desempenho de controle apresentado em algumas aplicações, por se tornar muito conservativo. Outra desvantagem foi que havia um esforço computacional e um tempo requerido grande demais para o cálculo da função objetivo de cada modelo e, dentro deste conjunto viável, existem combinações de modelos que seriam muito pouco prováveis de estarem sendo o modelo real da planta.

SCOKAERT e MAYNE (1998) propuseram uma otimização em malha fechada e a minimização do pior caso, assumindo que as incertezas estejam contidas num polítopo construído a partir dos valores máximos permitidos para os distúrbios. Foi empregada uma estratégia de controle dual, de tal modo que os estados do sistema sejam forçados a entrar numa região “robusta” positivamente invariante, onde as restrições

nos estados e nas entradas sejam satisfeitas, garantindo a estabilidade. Este controlador é um MPC que resolve o problema de minimização do erro para o pior caso, acrescentando-se, a este problema de otimização, uma restrição terminal. Para este caso, calcula-se uma função objetivo modificada e as ações de controle obtidas, considerando os diversos modelos na região de incerteza definida pelos vértices do polítopo, são consideradas para o problema de otimização. Desta forma, considera-se o efeito da retroalimentação na otimização que é, então, calculada em malha fechada. Dentro da região robusta, aplica-se, então, um ganho estático ao estado como uma ação de controle.

RODRIGUES e ODLOAK (2000) apresentaram uma formulação de MPC robusto com realimentação de saída, acrescentando, como restrição no problema de controle, a condição de estabilidade imposta pela desigualdade de Lyapunov. Os estados são estimados a partir da inclusão de um filtro de Kalman. O problema de controle é resolvido via LMIs. O trabalho apresentado mostrou um algoritmo para incluir restrições nas variáveis manipuladas. No estudo, foi verificado que a estabilidade só pode ser provada se a restrição que se torna ativa permanece ativa até ser atingido um novo estado de equilíbrio. Se ocorrer transição no estado destas restrições, a estabilidade deixa de ser comprovada.

RALHAN e BADGWELL (2000) propuseram um MPC robusto, limitado a aplicações em processos estáveis, baseado em espaço de estado e com a incerteza prevista em um dado conjunto de modelos possíveis para o processo. A robustez quanto à estabilidade é atingida com a inclusão de restrições que garantam a contração da função objetivo de cada modelo. No entanto, o controlador otimiza as ações de controle apenas para o modelo com a maior probabilidade de ocorrência, chamado de modelo nominal. Esta idéia será utilizada neste trabalho.

RODRIGUES (2001) apresenta uma abordagem de MPC em variáveis de estado que utiliza um modelo denominado OPOM (Output Prediction Oriented Model). Este conceito de estado é de ordem mínima, requerendo um observador para estimar os estados a partir das leituras obtidas do processo. Neste trabalho, o autor demonstra que o IHMPC com formulação baseada no OPOM tem estabilidade nominal garantida para processos estáveis.

BEMPORAD *et al.* (2002) apresentaram uma estratégia para a síntese de um MPC com estabilidade nominal e sujeito a restrições nas entradas onde o controlador é sintetizado *off-line*. Eles mostraram que o problema de otimização para implementar o MPC pode ser visto como uma programação quadrática multiparamétrica e



propuseram um algoritmo para a solução deste problema. Eles também mostraram que a solução ótima é uma função afim por partes dos estados. O espaço vetorial do problema completo é dividido em subespaços compostos de regiões convexas, onde o problema de otimização converge. Para cada região uma lei de controle distinta é obtida, em função desses estados. Como o MPC proposto implementa a estratégia de ganho de realimentação do estado, essas regiões são definidas em função da ativação das restrições nas entradas. Essas regiões, definidas pelos autores como células poliedrais, são armazenadas e é gerada uma tabela com os ganhos de realimentação correspondentes. A etapa de implementação em tempo real consiste em identificar as células poliedrais que contenham o estado atual, através de uma busca linear, e relacionar esta região com a tabela de ganhos associada à mesma. A proposta de BEMPORAD *et al.* (2002) apresenta como limitação a hipótese de que todos os estados tenham sua medição disponível e é restrita ao caso nominal, onde o processo corresponde ao modelo assumido no controlador.

Em outra contribuição da academia, WAN e KOTHARE (2002) propuseram a síntese de um MPC robusto cuja solução da malha fechada satisfaz a condição de Lyapunov. Este controlador utiliza a realimentação do estado para o cálculo das novas ações do controlador. Os estados são estimados a partir de um observador ou estimador de estados, que é adicionado ao problema de controle em questão. Os cálculos realizados para a síntese do MPC robusto são realizados *off-line* e a determinação do ganho de realimentação de estado menos conservador é obtida através de uma minimização dos erros quadráticos para cada instante de amostragem, feita em tempo real, através de interpolações sobre os ganhos da tabela gerada anteriormente. Visando obter leis de controle menos conservadoras, WAN e KOTHARE (2002) calculam os ganhos robustos para um subconjunto de estados tal que a norma quadrática ponderada pela matriz de estabilidade  $Q$  seja menor que 1, onde  $Q$  relaciona-se com a condição de estabilidade de Lyapunov para a malha fechada com ganho de realimentação de estado. Além disso, é realizada a síntese de um ganho do observador de estados que satisfaça uma taxa máxima de decaimento do erro de estimação. O modelo para o caso nominal é utilizado nesta etapa de determinação do observador. As restrições nas entradas são implementadas via elipsóides invariantes. A condição de estabilidade da malha fechada é definida a partir destes ganhos de realimentação de estado e do observador determinados no passo anterior. Se esta condição não for satisfeita, uma nova sintonia para controlador e observador deve ser especificada, os cálculos são refeitos e o teste de estabilidade da malha fechada é novamente verificado. Este procedimento é realizado iterativamente até que a

estabilidade da malha fechada seja satisfeita para cada um dos elementos do conjunto de estados previamente estabelecidos para síntese do controlador. As deficiências da proposta de WAN e KOTHARE (2002) relacionam-se com soluções de controle muito conservadoras para obter a estabilidade da malha fechada e a necessidade de que o estado em regime permanente seja conhecido. Este último aspecto torna a solução proposta por WAN e KOTHARE (2002) aplicável apenas ao problema regulador. A metodologia interativa para o teste de estabilidade também traz como inconveniente o aumento do esforço computacional requerido para a solução do problema de controle.

CUZZOLA *et al.* (1996) propuseram uma modificação para o MPC robusto com ganho de realimentação de estado proposto por KOTHARE *et al.* (1996), obtendo uma nova parametrização para o ganho do controlador que satisfaça múltiplas desigualdades de Lyapunov, uma para cada vértice do politopo que constitui a representação das incertezas no modelo. Deste modo, o MPC via realimentação de estados pode ser aplicado a sistemas cuja representação de incertezas esteja contida neste politopo, obtendo soluções menos conservadoras.

Em 2002, MACIEJOWSKI (2002) propôs um conceito de estados compostos das próprias leituras das entradas e saídas da planta. A grande vantagem deste conceito, embora não sendo uma definição de estado mínimo, é a garantia de observabilidade do estado, pelo fato do mesmo ser mensurável. A desvantagem era o fato de o modelo ser posicional, o que, não necessariamente, elimina o *offset*.

PANNOCCHIA (2003) apresentou uma contribuição com o uso de um algoritmo baseado no IHMPC de RAWLINGS e MUSKE (1993) utilizando um modelo de perturbação na entrada. Através de uma otimização não linear, PANNOCCHIA (2003) afirma que é possível determinar o modelo nominal que mais se aproxima da planta e, com isso, maximizar o desempenho com as incertezas no modelo consideradas. Esta otimização é conduzida através de uma combinação dos modelos que formam um politopo. PANNOCCHIA (2003) considerou que uma otimização min-max desta combinação de modelos sobre o domínio de incertezas é capaz de incorporar a robustez.

WAN e KOTHARE (2003) apresentaram um MPC robusto usando regiões terminais positivamente invariantes. Usando o controlador desenvolvido por WAN e KOTHARE (2002), estes autores propuseram uma construção *off-line* de um conjunto contínuo de restrições terminais positivamente invariantes e a utilização *on-line* de um controlador estável baseado no modelo nominal. É feita uma interpolação entre duas regiões de

modo a otimizar o desempenho, uma região com raio maior que a outra região, de modo a levar o sistema para o ótimo que, por hipótese, corresponde ao problema sem restrições. As deficiências encontradas nesta proposta são as limitações para o problema regulatório, tendo em vista a necessidade do conhecimento do estado estacionário e a interação para a solução do problema exigindo maior esforço computacional. Outro fator limitante é a hipótese de restrições inativas quando o sistema atinge a região positivamente invariante, o que nem sempre pode ser verdadeiro.

RODRIGUES e ODLOAK (2003b) incorporaram no modelo OPOM sistemas estáveis e instáveis ou integradores sem tempo morto. Essa forma de modelo facilita o desenvolvimento de controladores preditivos de horizonte infinito, que tem a estabilidade garantida para o problema nominal, conforme RAWLINGS e MUSKE (1993). O controlador é baseado no modelo de espaço de estado no qual a saída é representada como uma função contínua no tempo e os erros das saídas são integrados ao longo do horizonte de predição infinito. É robusto para duas classes de incerteza de modelagem: planta tipo multimodelo e incerteza politópica na matriz de entrada. Na primeira classe, a incerteza pode ser representada por um conjunto de modelos correspondentes a diferentes pontos de operação. Na segunda classe a incerteza é concentrada na entrada da matriz de distribuição, a qual pertence a um conjunto politópico.

DOUGHERTY e COOPER (2003) apresentaram os problemas do DMC com processos não lineares, tais como a limitação de uso em uma pequena região de operação. Esses autores apresentaram um controlador com uso adaptativo de múltiplos modelos, garantindo uma maior região de operação nestes processos não lineares. O trabalho foi desenvolvido para um caso monovariável e não se aplicava a casos em que a não linearidade mudava o sinal do ganho estacionário.

ODLOAK (2004) apresentou um trabalho sobre controle preditivo robusto estendido com incerteza no modelo, onde a estabilidade é garantida. A abordagem mais popular de se obter um MPC estável consiste na adoção de um controle de horizonte infinito conforme RAWLINGS e MUSKE (1993). O método é baseado na formulação em espaço de estado, cuja solução da função objetivo em malha aberta do horizonte infinito é reduzida a função objetivo de horizonte finito através da definição de um peso para o estado terminal o qual é obtido pela solução de uma equação de Lyapunov. O método é detalhado para dois controladores bem conhecidos: MPC robusto com restrição no custo e MPC min-max. A estratégia abre a possibilidade para a aplicação

destes controladores para o caso prático onde o problema de controle não pode ser reduzido para o problema regulatório por causa das perturbações ou das não linearidades do modelo.

WANG e RAWLINGS (2004) propuseram um controlador robusto em que é verificada para um conjunto de ganhos de realimentação de estado e síntese do observador a condição de estabilidade. Nesta proposta, foi utilizado um MPC de horizonte infinito com realimentação do estado considerando um conjunto finito de modelos possíveis para o processo. Para relaxar o problema, variáveis de folga foram criadas para remover o *offset* entre os diversos modelos possíveis, tornando viável o problema de otimização do controle robusto. A síntese do controlador é feita *off-line*, gerando uma árvore de possibilidades para o mesmo. No entanto, não há prova de garantia de estabilidade do controlador. Durante a execução, é feito um teste da condição de estabilidade da malha fechada para um conjunto de ganhos do controlador e do estimador de estados que satisfaçam o problema de otimização de controle. O algoritmo pode ficar complexo e com uma estrutura da árvore de possibilidades crescendo exponencialmente com o horizonte de predição e com o número de modelos, o que implica em esforço computacional. O artigo é complementado por uma segunda parte onde são estudados exemplos de aplicação do controlador em processos que contenham incerteza no ganho estacionário, constante de tempo e tempo morto do processo.

CARRAPIÇO (2004) e CARRAPIÇO e ODLOAK (2005) apresentaram uma proposta de um controlador IHMPC para sistemas estáveis e integradores com garantia de estabilidade em malha fechada. O principal esforço nesse trabalho é eliminar o conflito entre as restrições das entradas do sistema, as quais são geralmente incluídas no MPC, e as restrições criadas para anular os modos integradores do sistema no final do horizonte de controle. Esta idéia, inclusive, é aproveitada neste trabalho de tese. O controlador obtido foi, originalmente, impedido de ser utilizado na indústria porque o problema de controle pode se tornar inviável para grandes perturbações ou para o problema servo. O controlador foi, então, aprimorado através da modificação da função objetivo, onde variáveis de folga são incluídas para aumentar o conjunto de soluções viáveis do problema de controle. As restrições rígidas associadas com os modos integradores são, então, suavizadas e, como resultado, o problema de controle é viável para muitas classes de perturbações possíveis e para alterações no *set point*. Nesse trabalho, dois métodos são propostos para obter a estabilidade: impondo a contração da norma do vetor de variáveis de folga associadas com os modos

integradores e pela separação do problema de controle em dois subproblemas que são resolvidos a cada período de amostragem.

RODRIGUES e ODLOAK (2005) estenderam o trabalho de RODRIGUES e ODLOAK (2000) de modo a permitir um chaveamento nas restrições ativas. Para isso, o controlador foi sintetizado em duas fases. A primeira fase, de concepção do controlador, é realizada *off-line*, onde é obtido um conjunto de controladores lineares correspondentes a todas as combinações possíveis em termos de variáveis manipuladas e controladas, com análise de todos os subconjuntos possíveis de restrições ativas e inativas. A segunda fase, de síntese da lei de controle, é realizada *on-line* e corresponde à solução de um problema de otimização com uma função objetivo similar a do MPC convencional, mas onde as ações de controle são obtidas a partir de uma combinação convexa das matrizes de ganhos dos controladores lineares obtidos na primeira fase. Esse problema de otimização inclui restrições nas variáveis manipuladas. A desvantagem dessa proposta está no esforço computacional exigido para a solução do problema *off-line*.

MHASKAR (2006) apresentou a formulação de um MPC robusto quanto à incerteza no modelo do processo e quanto a falhas nas variáveis manipuladas deste controlador, baseado no desenvolvimento de uma função de controle de Lyapunov, independente da função de custo do controlador.

PEREZ (2006) alterou o modelo proposto por MACIEJOWSKI (2002) para a forma incremental e utilizou este modelo no controlador proposto por RODRIGUES e ODLOAK (2005), obtendo um controlador robusto e de esforço computacional reduzido por evitar o uso de observador de estados, visto que o estado é obtido a partir da própria informação do processo. O controlador MPC robusto quanto à estabilidade obtido é baseado na realimentação da saída e admite restrições nas entradas e incertezas no modelo da planta. O trabalho considerou o caso particular de um modelo em espaço de estado, onde o estado é lido diretamente da planta, sendo aplicado para a situação em que o sistema escolhido de entradas possa ficar saturado ou que o processo seja representado por um modelo diferente do modelo considerado na função objetivo do controlador. Para isso, o MPC se propõe a resolver o problema de otimização em dois estágios: no estágio *off-line*, vários controladores sem restrição são obtidos a partir de um problema de otimização onde inequações de Lyapunov são acrescentadas ao problema como restrições de forma a garantir a contração do estado (estabilidade). Estes controladores, representados por uma matriz de ganhos, correspondem a todas as configurações possíveis de saturação das variáveis

manipuladas para um dado conjunto possível de variáveis controladas. Nessas combinações, incluídas como restrições no controlador, todos os modelos previstos para o processo são considerados. Dessa forma, perdendo-se uma entrada, o subconjunto de saídas controladas pode ser alterado. Na versão anterior existente do método proposto por RODRIGUES e ODLOAK (2005), esse estágio *off-line* envolvia um observador de estados o que dificulta a solução do problema de otimização do MPC robusto, consumindo grande tempo computacional. Além disso, requer uma solução inicial viável que nem sempre é trivial. Com a versão que foi proposta do modelo de espaço de estado, o estimador de estado tornou-se desnecessário, pois o estado passou a ser medido. Na etapa *on-line* do projeto do controlador, uma lei ótima de controle é obtida a partir da combinação convexa das configurações de controle que correspondem ao conjunto de variáveis manipuladas disponíveis, ou seja, que não se encontrem saturadas. Também nessa etapa é considerada a incerteza do modelo utilizado pelo controlador. No entanto, por ser um controlador de horizonte finito, sua estabilidade só é garantida no espaço vetorial do politópico gerado pelos vértices correspondentes às diversas previsões de modelo para o processo.

GONZÁLEZ, ODLOAK e MARCHETTI (2007) apresentaram um MPC robusto para sistemas com polos estáveis e polos integradores. Neste trabalho, assume-se que o modelo tem incerteza na parte integradora e na parte estável. A abordagem proposta é uma extensão do método apresentado por ODLOAK (2004). No método considera-se também uma função custo modificada que tem horizonte de predição infinito e torna o controlador MPC globalmente convergente para qualquer horizonte de controle. O controlador foi baseado na versão modificada do modelo de espaço de estado utilizado por CARRAPIÇO e ODLOAK (2005) para desenvolver um MPC nominalmente estável para os sistemas com polos estáveis e integradores. A abordagem considera a inclusão de uma restrição de contração de custo, que é sempre viável. Por outro lado, a formulação permite focar problemas que não podem ser reduzidos ao problema regulador devido à presença de perturbações desconhecidas ou não linearidade. Os autores mostram a capacidade dos controladores de lidar com incertezas em todos os parâmetros do modelo linear considerado no controlador.

GONZÁLEZ, PEREZ e ODLOAK (2007) utilizaram o modelo proposto por PEREZ (2006) e propuseram um controlador de horizonte infinito para o caso nominal. Este controlador será objeto de estudo deste trabalho e será estendido para o problema robusto incluindo polos integradores no processo.

GONZÁLEZ e ODLOAK (2009) apresentaram um MPC estável para sistemas com saídas controladas por faixa. O controle por faixas é uma das estratégias utilizadas para liberar graus de liberdade do sistema para a otimização em tempo real. Este trabalho destaca que muitas variáveis de processo podem ser controladas por faixas, ao invés de fixar *set points* para as mesmas. Desta forma, estas saídas podem ser tratadas apenas como variáveis controladas quando, no horizonte de predição do controlador, elas fugirem das faixas de restrição. A abordagem usual para este tipo de controle é anulando os pesos das variáveis controladas que estejam dentro da região admissível e ativando estes pesos para as variáveis que se encontrem fora desta região. Neste último caso, quando os valores de predição estiverem fora das faixas, os erros associados às saídas passarão a ser computados na função objetivo do controlador utilizando os pesos previstos para estas variáveis. Para a computação do erro, conforme BALLIN (2008), o *set point* das variáveis será definido igual ao limite da faixa ultrapassado, visando trazer as variáveis em questão para dentro da faixa. O problema desta abordagem é a não linearidade que ocorre entre a ativação e desativação dos pesos na função objetivo do controlador. GONZÁLEZ e ODLOAK (2009) propuseram um MPC estável que considera o controle por faixas e incorpora objetivos para os estados estacionários, considerando, para isso, aspectos econômicos. A prova de estabilidade clássica é estendida à estratégia de controle por faixas através da consideração dos *set points* das saídas como variáveis de decisão adicionais do problema de controle. Além disso, condições suficientes são encontradas para as matrizes de pesos da função custo no sentido de garantir a convergência da entrada do sistema para os *targets*, que são os valores de estados estacionários desejados conforme a função econômica. Esta estratégia mostrou por simulação um desempenho adequado para um subsistema 3x2 de um sistema industrial típico.

CHEN e ALLGÖWER (2009) propuseram um controlador preditivo não linear (NMPC) de horizonte de predição infinito e de horizonte de controle finito. O problema de otimização é convertido em uma soma finita, embora a predição seja infinita. A solução deste problema gera as ações que serão tomadas até um dado horizonte finito. As equações de restrição que levam o estado da planta ao valor desejado são transformadas em inequações onde o estado corrente do processo é levado, pelo NMPC, até uma determinada região terminal, próxima da desejada e o controlador, de modo dual, se comporta como linear a partir desta região, levando o processo ao valor desejado.

A grande maioria das estratégias atuais robustas de controle com MPC, disponíveis na literatura, assumem que o estado do modelo que representa o processo é medido. Contribuições abordando o caso mais realista, onde apenas as saídas controladas são medidas, são bem menos frequentes na literatura sobre MPC. Em quase sua totalidade, esses trabalhos tentam provar a estabilidade do sistema aumentado com o observador de estados que é incorporado ao MPC com realimentação de estado. Em um trabalho recente FORMULARO e FRANZÈ (2011) apresentaram uma proposta para o MPC robusto para incertezas no modelo com norma limitada. O procedimento consiste de uma etapa *off-line* onde um controlador linear de realimentação de estado sem restrições e um observador estável são projetados usando desigualdades matriciais bilineares. Na etapa *on-line* considera-se um horizonte móvel onde  $N$  ações de controle são adicionadas às ações do controlador primário. Essas ações de controle são calculadas resolvendo-se um problema de desigualdades matriciais lineares cuja complexidade cresce linearmente com a dimensão do sistema.

Outro trabalho recente sobre MPC robusto com realimentação de saída foi proposto por LØVAAS *et al.* (2010) que estudaram o caso de sistemas quadrados, estáveis em malha aberta com incerteza com norma limitada e perturbação permanente na saída. Para lidar com a perturbação na saída, o modelo é estendido com ação integral na saída e um estimador é usado para estimar o estado e o distúrbio.

Um trabalho relacionado com esta tese foi apresentado por GONZÁLEZ e ODLOAK (2011) e considera sistemas estáveis em malha aberta e com incerteza tipo multimodelo. O MPC proposto é robusto para esse tipo de incerteza operando com realimentação de saída e distúrbios permanentes nas saídas e/ou entradas. O método é baseado no modelo de realinhamento aqui estudado e, portanto, não há necessidade de inclusão de um estimador de estados.



### III. CONTROLADOR MPC COM MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA INCREMENTAL

---

Este capítulo apresenta uma revisão do conceito de espaço de estado. Os modelos em espaço de estado têm ganhado importância para a representação de um processo tendo em vista a notação compacta que o mesmo incorpora ao problema de predição das variáveis controladas no MPC.

#### III.1. MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO POSICIONAL

##### III.1.1. Conceito de Estado

O estado de um sistema dinâmico é um conjunto mínimo de variáveis, chamadas de variáveis de estado, tal que, a partir do seu conhecimento em um dado instante inicial, junto com o conhecimento das entradas atuais e futuras, é possível conhecer o estado para qualquer instante futuro. A equação indicada em **(III-1)** mostra um vetor de variáveis de estado, às vezes chamada de apenas “estado”, caracterizando um estado em um instante genérico  $t$ ,

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t) \dots x_p(t)\} \quad \text{(III-1)}$$

- $x(t)$  - Vetor de estado
- $x_i(t)$  - Variável de estado
- $p$  - Dimensão do espaço de estado

Seja um processo discreto no tempo representado pelo sistema de equações indicado em **(III-2)**.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad \text{(III-2)}$$

- $x$  - Vetor de estado,  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$
- $u$  - Vetor das variáveis manipuladas,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$
- $y$  - Vetor das variáveis controladas,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,
- $k$  - Intervalo de tempo discreto

Considere-se que o modelo indicado na equação **(III-2)** represente um processo que esteja com seu ponto de operação em torno de uma região definida como regime permanente, ou estado estacionário, que pode ser representado pelo ponto  $(u^{ss}, y^{ss})$ . Conseqüentemente, os vetores de entrada e saída da equação indicada em **(III-2)** podem ser considerados como variáveis de desvio em relação a esse estado estacionário.

$$y(k) = \tilde{y}(k) - y^{ss} \quad \text{(III-3)}$$

- $\tilde{y}$  - Vetor real de saída
- $y^{ss}$  - Vetor de saída em regime permanente
- $y(k)$  - Vetor de saída como variável de desvio

$$u(k) = \tilde{u}(k) - u^{ss} \quad \text{(III-4)}$$

- $\tilde{u}$  - Vetor real de entrada
- $u^{ss}$  - Vetor de entrada em regime permanente
- $u(k)$  - Vetor de entrada como variável incremental

### **III.1.2. Observador ou estimador de Estados**

O observador de estados é um elemento introduzido em um sistema que use o modelo em espaço de estado para predizer ou estimar o estado do sistema a partir de leituras obtidas da planta no caso que este estado não seja mensurável.

O sistema indicado em **(III-2)** pode ter seu estado corrigido pelas medições obtidas do processo conforme mostrado em **(III-5)**.

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k) + Bu(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k|k-1)] \quad \text{(III-5)}$$

- $K$  - Matriz de ganho do observador
- $\hat{x}(k+1|k)$  - Predição do estado para o instante  $k+1$  feita no instante  $k$

Define-se como erro de estimação:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad \text{(III-6)}$$

Com esta definição, subtraindo **(III-5)** de **(III-2)** e operando, vem:

$$\tilde{x}(k+1|k) = A\tilde{x}(k|k-1) - K \left[ y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \right] \quad (\text{III-7})$$

$$\tilde{x}(k+1|k) = A\tilde{x}(k|k-1) - KCx(k) + KC\hat{x}(k|k-1) = [A - KC]\tilde{x}(k|k-1) \quad (\text{III-8})$$

Se for selecionado um valor de  $K$  que faça com que a equação (III-8) tenda a zero, o erro de predição também tende a zero.

O sistema descrito em (III-5) é definido como um observador de estados do sistema (III-2), já que estima o estado presente a partir das medições correntes da planta. E pela equação (III-8) percebe-se que o observador de estados pode influenciar na estabilidade da malha, pois ele faz parte da matriz de estados  $[A - KC]$  definida nesta equação. Esta estabilidade não pode ser garantida quando o problema de otimização resolvido pelo MPC tiver restrições ativas, o que significa não linearidade e, portanto, o princípio da separação não pode ser aplicado. Este princípio garante que um controlador linear estável, associado a um observador estável, estabiliza a malha de controle fechada.

### III.1.3. MPC utilizando modelo em espaço de estado

O problema de otimização, utilizando a função objetivo do MPC, calculará um conjunto de ações de controle capaz de minimizar a mesma, dentro de um horizonte de predição, conforme a equação (III-9).

$$J_k = \sum_{j=1}^{np} \left[ y(k+j|k) - y^{sp} \right]^T Q \left[ y(k+j|k) - y^{sp} \right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \Delta u(k+j|k) \right]^T R \left[ \Delta u(k+j|k) \right] \quad (\text{III-9})$$

- $J_k$  - Função objetivo para o instante  $k$
- $y(k+j|k)$  - Predição para a variável de saída feita no instante  $k$  para o instante  $k+j$
- $\Delta u(k+j|k)$  - Predição para o incremento na entrada feita no instante  $k$  para o instante  $k+j$ ,  $\Delta u(k+j|k) = u(k+j|k) - u(k+j-1|k)$
- $Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas,  $W \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $R$  - Matriz de supressão de movimento das variáveis manipuladas,  $R \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$

Para desenvolver a expressão indicada em (III-9) em função do instante atual  $k$ ,

podem-se utilizar as equações indicadas em **(III-2)** e, por processo recursivo, obter a estimativa das saídas de processo ao longo do horizonte de predição  $np$ .

Para o instante  $k+1$ :

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k) \quad \text{(III-10)}$$

Para o instante  $k+2$ :

$$\begin{aligned} x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + Bu(k+1) \\ x(k+2|k) &= A[Ax(k|k) + Bu(k)] + Bu(k+1) \\ x(k+2|k) &= A^2x(k|k) + ABu(k) + Bu(k+1) \end{aligned} \quad \text{(III-11)}$$

Para o instante  $k+3$ :

$$\begin{aligned} x(k+3|k) &= Ax(k+2|k) + Bu(k+2) \\ x(k+3|k) &= A[A^2x(k|k) + ABu(k) + Bu(k+1)] + Bu(k+2) \\ x(k+3|k) &= A^3x(k|k) + A^2Bu(k) + ABu(k+1) + Bu(k+2) \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

E para um instante genérico  $k+j$ :

$$\begin{aligned} x(k+j|k) &= A^jx(k|k) + A^{j-1}Bu(k) + A^{j-2}Bu(k+1) + \\ &A^{j-3}Bu(k+2) + \dots + Bu(k+j-1) \end{aligned} \quad \text{(III-13)}$$

Para se obter as saídas do processo em função do estado observado neste instante genérico  $k+j$ , tem-se a equação **(III-14)**.

$$y(k+j|k) = Cx(k+j|k) \quad \text{(III-14)}$$

Portanto, substituindo a equação **(III-14)** na equação **(III-13)**, vem:

$$\begin{aligned} y(k+j|k) &= CA^jx(k|k) + CA^{j-1}Bu(k) + CA^{j-2}Bu(k+1) + \\ &CA^{j-3}Bu(k+2) + \dots + CBu(k+j-1) \end{aligned} \quad \text{(III-15)}$$

Mas os valores de  $u$  após o instante  $k+m-1$  permanecem constantes e iguais ao valor neste, ou seja:

$$u(k+m-1) = u(k+m) = u(k+m+1) = \dots = u(k+m+np-1) \quad (\text{III-16})$$

Assim, supondo que o instante  $j$  seja  $m+1$ :

$$y(k+m+1|k) = CA^{m+1}x(k|k) + CA^m Bu(k) + CA^{m-1} Bu(k+1) + CA^{m-2} Bu(k+2) + \dots + CABu(k+m-1) + CBu(k+m) \quad (\text{III-17})$$

$$y(k+m+1|k) = CA^{m+1}x(k|k) + CA^m Bu(k) + CA^{m-1} Bu(k+1) + CA^{m-2} Bu(k+2) + \dots + [CAB + CB]u(k+m-1) \quad (\text{III-18})$$

Para o instante  $j$  igual a  $m+2$ , vem:

$$y(k+m+2|k) = CA^{m+2}x(k|k) + CA^{m+1} Bu(k) + CA^m Bu(k+1) + CA^{m-1} Bu(k+2) + \dots + CA^2 Bu(k+m-1) + CABu(k+m) + CBu(k+m+1) \quad (\text{III-19})$$

$$y(k+m+2|k) = CA^{m+2}(k|k) + CA^{m+1} Bu(k) + CA^m Bu(k+1) + CA^{m-1} Bu(k+2) + \dots + [CA^2 B + CAB + CB]u(k+m-1) \quad (\text{III-20})$$

Para o instante de predição  $np$ :

$$y(k+np|k) = CA^{np}x(k|k) + CA^{np-1} Bu(k) + CA^{np-2} Bu(k+1) + CA^{np-3} Bu(k+2) + \dots + [CA^{np-m} B + CA^{np-m-1} B + \dots + CB]u(k+m-1) \quad (\text{III-21})$$

A equação matricial indicada em (III-22) define a predição das saídas até o horizonte de predição  $np$  para um sistema como indicado em (III-2).

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+m|k) \\ y(k+m+1|k) \\ \vdots \\ y(k+np|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1} B & CA^{m-2} B & \dots & CB \\ CA^m B & CA^{m-1} B & \dots & C\tilde{A}_1 B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1} B & CA^{np-2} B & \dots & C\tilde{A}_{np-m} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 & - A + I \\ \tilde{A}_2 & - A^2 + A + I \\ \tilde{A}_{np-m} & - A^{np-m} + \dots + A^2 + A + I \end{aligned}$$

A equação matricial indicada em (III-22) pode ser representada de forma compacta,

conforme a equação (III-23).

$$\bar{y}(k) = \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k \quad (\text{III-23})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} & - \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix}, \text{ matriz de observabilidade} \\ \tilde{\Theta} & - \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^m B & CA^{m-1}B & \dots & C\tilde{A}_1B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \dots & C\tilde{A}_{np-m}B \end{bmatrix}, \text{ matriz de controlabilidade} \\ \bar{y}(k) & - \begin{bmatrix} y(k+1|k)^T & y(k+2|k)^T & \dots & y(k+np|k)^T \end{bmatrix}^T \\ u_k & - \begin{bmatrix} u(k|k)^T & u(k+1|k)^T & \dots & u(k+m-1|k)^T \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Portanto, a primeira parte da função objetivo proposta em (III-9) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=0}^{np} \left[ y(k+j|k) - y^{sp} \right]^T Q \left[ y(k+j|k) - y^{sp} \right] = \left[ \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k - \bar{y}^{sp} \right] \quad (\text{III-24})$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} & - \text{Matriz diagonal do peso } Q, \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(np.ny) \times (np.ny)} \\ \bar{y}^{sp} & - \text{Vetor set point, } \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{(np.ny)} \end{aligned}$$

Para a segunda parte da função objetivo, o incremento nas entradas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k) - u(k-1) \\ u(k+1) - u(k) \\ \vdots \\ u(k+m-1) - u(k+m-2) \end{bmatrix} = u_k - Mu_k - \tilde{I}u(k-1) \quad (\text{III-25})$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & \cdots & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \cdots & I_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} \end{bmatrix}, M \in \mathbb{R}^{(m.nu) \times (m.nu)}$$

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{nu} \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \end{bmatrix}, \tilde{I} \in \mathbb{R}^{(m.nu) \times nu}$$

Então, a segunda parte da função objetivo proposta em **(III-9)** fica sendo:

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\Delta u(k+j|k)]^T R [\Delta u(k+j|k)] = \left[ (I-M)u_k - \tilde{I}u(k-1) \right]^T \bar{R} \left[ (I-M)u_k - \tilde{I}u(k-1) \right] \quad (\text{III-26})$$

$\bar{R}$  - Matriz diagonal do peso  $R$ ,  $\bar{R} \in \mathbb{R}^{(nu.nm) \times (nu.nm)}$

Utilizando **(III-24)** e **(III-26)**, a função objetivo pode ser escrita como:

$$J_k = \left[ \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k - \bar{y}^{sp} \right] + \left[ I_M u_k - \tilde{I}u(k-1) \right]^T \bar{R} \left[ I_M u_k - \tilde{I}u(k-1) \right] \quad (\text{III-27})$$

$$I_M = I - M$$

A função objetivo indicada em **(III-27)** pode ser desenvolvida como mostrado a seguir.

$$J_k = \left[ x(k)^T \tilde{\Psi}^T + u_k^T \tilde{\Theta}^T - \bar{y}^{spT} \right]^T \bar{Q} \left[ \tilde{\Psi}x(k) + \tilde{\Theta}u_k - \bar{y}^{sp} \right] + \left[ u_k^T I_M^T - u(k-1)^T \tilde{I}^T \right]^T \bar{R} \left[ I_M u_k - \tilde{I}u(k-1) \right] \quad (\text{III-28})$$

$$\begin{aligned}
J_k = & x(k)^T \tilde{\Psi}^T \bar{Q} \tilde{\Psi} x(k) + u_k^T \tilde{\Theta}^T \bar{Q} \tilde{\Psi} x(k) - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \tilde{\Psi} x(k) + \\
& x(k)^T \tilde{\Psi}^T \bar{Q} \tilde{\Theta} u_k + u_k^T \tilde{\Theta}^T \bar{Q} \tilde{\Theta} u_k - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \tilde{\Theta} u_k - x(k)^T \tilde{\Psi}^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} \\
& - u_k^T \tilde{\Theta}^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \bar{y}^{sp} + u_k^T I_M^T \bar{R} I_M u_k - u(k-1)^T \tilde{I}^T \bar{R} I_M u_k \\
& - u_k^T I_M^T \bar{R} I_M u(k-1) + u(k-1)^T \tilde{I}^T \bar{R} I_M u(k-1)
\end{aligned} \tag{III-29}$$

$$\begin{aligned}
J_k = & u_k^T \left[ \tilde{\Theta}^T \bar{Q} \tilde{\Theta} + I_M^T \bar{R} I_M \right] u_k + 2 \left\{ \left[ \tilde{\Psi} x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \tilde{\Theta} - u(k-1)^T \tilde{I}^T \bar{R} I_M \right\} u_k \\
& + \left[ \tilde{\Psi} x(k) + \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \tilde{\Psi} x(k) + \bar{y}^{sp} \right] - 2 \bar{y}^{spT} \bar{Q} \tilde{\Psi} x(k) + u(k-1)^T \tilde{I}^T \bar{R} I_M u(k-1)
\end{aligned} \tag{III-30}$$

Como os dois últimos termos indicados em **(III-30)** não dependem do vetor de variáveis de decisão  $u_k$ , a função objetivo indicada em **(III-28)** pode ser reduzida para a forma:

$$J_k = u_k^T H u_k + 2c_f^T u_k \tag{III-31}$$

$$\begin{aligned}
H & - \tilde{\Theta}^T \bar{Q} \tilde{\Theta} + I_M^T \bar{R} I_M \\
c_f^T & - \left[ \tilde{\Psi} x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \tilde{\Theta} - u(k-1)^T \tilde{I}^T \bar{R} I_M
\end{aligned}$$

Normalmente as variáveis manipuladas de um processo são limitadas aos valores máximos e mínimos possíveis, tais como abertura e fechamento de uma válvula de controle. Da mesma forma costuma-se limitar os incrementos nas variáveis manipuladas, tais como a velocidade de um inversor de frequência. Estas limitações são acrescentadas ao problema de otimização através do uso de restrições.

Portanto, a lei de controle do MPC posicional baseado em modelo de espaço de estado é a solução do seguinte problema de programação quadrática:

$$\min_{u_k} J_k = u_k^T H u_k + 2c_f^T u_k \tag{III-32}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
u_{\min} & \leq u(k+j) \leq u_{\max} \\
-\Delta u_{\max} & \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u_{\max}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1
\end{aligned}$$

Os conceitos apresentados nesta seção serão utilizados neste trabalho de tese para a estimativa dos estados até o horizonte de controle estendido. Este conceito de horizonte de controle estendido será definido posteriormente.



## III.2. MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO INCREMENTAL

### III.2.1. Controle com Matriz Dinâmica (DMC)

O DMC, proposto por CUTLER e RAMAKER (1979), foi um dos primeiros controladores preditivos aplicado na indústria. Este controlador utiliza como modelo a resposta ao degrau, o qual, para um sistema de  $ny$  saídas e  $nu$  entradas, corresponde ao seguinte modelo em espaço de estado não mínimo:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \quad \text{(III-33)}$$

$$\begin{aligned}
 x(k) & - \left[ y(k+1|k)^T \quad y(k+2|k)^T \quad \cdots \quad y(k+N|k)^T \right]^T \\
 A & - \begin{bmatrix} 0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} & \cdots & 0_{ny} \\ 0_{ny} & 0_{ny} & I_{ny} & \cdots & 0_{ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \cdots & I_{ny} \\ 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \cdots & I_{ny} \end{bmatrix}, A \in \mathbb{R}^{(ny.n) \times (ny.n)} \\
 B & - \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix}, B \in \mathbb{R}^{(ny.n) \times nu} \\
 \Delta u(k) & - u(k+j|k) - u(k+j-1|k), u \in \mathbb{R}^{nu}, j \text{ um instante genérico} \\
 S_j & - \text{Matriz de coeficientes da resposta ao degrau no instante } j, \\
 & S_j \in \mathbb{R}^{ny \times nu} \\
 N & - \text{Horizonte de estabilização}
 \end{aligned}$$

A equação de predição descrita em (III-33), e que será estudada com mais detalhes no item III.2, considera que não ocorram novas ações de controle sobre o processo, apenas o movimento aplicado no instante atual  $k$ , representado por  $\Delta u(k)$ . Se for considerado um horizonte de controle maior que um, as ações futuras sobre as variáveis manipuladas devem ser consideradas na predição das variáveis controladas, conforme equação (III-34).

$$\begin{bmatrix} y_{k+1|k}^c \\ y_{k+2|k}^c \\ \vdots \\ y_{k+m|k}^c \\ \vdots \\ y_{k+n|k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ny,np} \\ 0_{ny} \\ \vdots \\ 0_{ny} \\ \vdots \\ 0_{ny} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} S_1 & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ S_2 & S_1 & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m & S_{m-1} & \cdots & S_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{np} & S_{np-1} & \cdots & S_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{k|k} \\ \Delta u_{k+1|k} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+m-1|k} \end{bmatrix} \quad (\text{III-34})$$

$$\bar{y} = \bar{N}x(k) + D_M \Delta u_k \quad (\text{III-35})$$

$D_M$  - Matriz Dinâmica

Define-se o vetor de set point da forma expressa na equação (III-36):

$$\bar{y}^{sp} = \left[ y^{sp^T} \quad \cdots \quad y^{sp^T} \right]^T, \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{ny,np} \quad (\text{III-36})$$

Utilizando as equações (III-35) e (III-36), a função objetivo do problema de otimização a ser resolvido pelo DMC será:

$$J_k = \left[ \bar{N}x(k) + D_M \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \bar{N}x(k) + D_M \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right] + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k \quad (\text{III-37})$$

Desenvolvendo a expressão (III-37) para torná-la aplicável a um problema de programação quadrática, visto que serão consideradas restrições explícitas:

$$J_k = \left[ x(k)^T \bar{N}^T + \Delta u_k^T D_M^T - \bar{y}^{sp^T} \right] \bar{Q} \left[ \bar{N}x(k) + D_M \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right] + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k \quad (\text{III-38})$$

$$J_k = x(k)^T \bar{N}^T \bar{Q} \bar{N}x(k) + \Delta u_k^T D_M^T \bar{Q} \bar{N}x(k) - \bar{y}^{sp^T} \bar{Q} \bar{N}x(k) + x(k)^T \bar{N}^T \bar{Q} D_M \Delta u_k + \Delta u_k^T D_M^T \bar{Q} D_M \Delta u_k - \bar{y}^{sp^T} \bar{Q} D_M \Delta u_k - x(k)^T \bar{N}^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} - \Delta u_k^T D_M^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \bar{y}^{sp^T} \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k \quad (\text{III-39})$$

$$J_k = \Delta u_k^T \left[ D_M^T \bar{Q} D_M + \bar{R} \right] \Delta u_k + 2 \left[ \bar{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} D_M \Delta u_k + \left[ \bar{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \bar{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right] \quad (\text{III-40})$$

Desta forma, o controlador QDMC para a solução deste problema de programação é dado pela equação (III-41):

$$\min_{\Delta u_k} J_k = \Delta u_k^T \bar{H} \Delta u_k + 2c_f^T \bar{Q} D_M \Delta u_k + c$$

*s.a.*

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

**(III-41)**

$$\begin{aligned} \bar{H} & - D_M^T \bar{Q} D_M + \bar{R} \\ c_f^T & - \left[ \tilde{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \\ c & - \left[ \tilde{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \tilde{N}x(k) - \bar{y}^{sp} \right] \end{aligned}$$

Um modelo de estados na forma incremental, como indicado em **(III-34)**, possui como vantagem a eliminação do *offset* nas variáveis controladas, o que é bastante interessante em uma unidade industrial. O termo constante  $c$  poderia ser eliminado da função objetivo do problema de otimização.

### III.2.2. Formas de obtenção dos modelos em variáveis de estado incremental

O modelo de espaço de estado definido no item **III.1** é dito posicional. A desvantagem do uso de modelos posicionais na lei de controle está na necessidade de se conhecer os valores estacionários das variáveis manipuladas e permitir *offset* nas variáveis controladas, caso o erro se mantenha constante.

Outra forma de se representar um modelo é a forma incremental ou de velocidade, onde incrementos das variáveis manipuladas são calculados pelo programa de otimização da função objetivo. Neste caso, tem-se como resultados incrementos das variáveis manipuladas, e a lei de controle obtida não admite *offset*, tendo em vista que, para um erro constante, novas ações de controle serão geradas.

A literatura mostra alguns métodos para se obter um modelo incremental (FRIEDLAND, 1986). Seja um modelo de variáveis em espaço de estados descrito na equação **(III-2)**. Deseja-se transformar este modelo posicional para a forma incremental, como indicado na equação **(III-42)**.

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\Delta u(k) \\ y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) \end{cases} \quad \text{(III-42)}$$

Pode-se, para isso, adotar os seguintes métodos:

i) Aplicando a equação **(III-2)** para predição do instante  $k$ , ou seja:

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) \quad (\text{III-43})$$

Subtraindo **(III-43)** de **(III-2)**, vem:

$$x(k+1) - x(k) = Ax(k) - Ax(k-1) + Bu(k) - Bu(k-1) \quad (\text{III-44})$$

$$x(k+1) - x(k) - Ax(k) + Ax(k-1) = Bu(k) - Bu(k-1) \quad (\text{III-45})$$

$$x(k+1) - [I + A]x(k) + Ax(k-1) = B[u(k) - u(k-1)] \quad (\text{III-46})$$

$$x(k+1) - [I + A]x(k) + Ax(k-1) = B\Delta u(k) \quad (\text{III-47})$$

$$x(k+1) = B\Delta u(k) + [I + A]x(k) - Ax(k-1) \quad (\text{III-48})$$

Definindo dois novos estados como:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(k) &= x(k) \\ \tilde{x}_2(k) &= [I + A]x(k) - Ax(k-1) \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

Desta forma, para o instante seguinte, e utilizando **(III-48)** e **(III-49)**:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(k+1) &= x(k+1) = B\Delta u(k) + \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_2(k+1) &= [I + A]x(k+1) - Ax(k) = [I + A]\{B[\Delta u(k)] + \tilde{x}_2(k)\} - A\tilde{x}_1(k) \end{aligned} \quad (\text{III-50})$$

Passando a equação indicada em **(III-50)** para a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & I + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ (I + A)B \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (\text{III-51})$$

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\Delta u(k) \quad (\text{III-52})$$

$$y = C \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \tilde{C}\tilde{x}(k) \quad (\text{III-53})$$

Pode-se mostrar que a matriz de estados  $\tilde{A}$  possui todos os autovalores da matriz original  $A$  e mais  $n_x$  autovalores em +1, onde  $n_x$  é a dimensão do estado definido em **(III-43)**. Isto pode ser percebido através de um exemplo. Supondo que a matriz  $A$  seja um escalar de valor 0,5, esta matriz terá um autovalor em 0,5. A nova matriz de estados obtida a partir da equação **(III-51)** será:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \quad \text{(III-54)}$$

Os autovalores da matriz  $\tilde{A}$  são 0,5 e +1.

ii) Uma segunda forma de se obter um modelo na forma incremental, MACIEJOWSKI (2002), é obtida substituindo a equação **(III-55)** na definição do estado **(III-2)**.

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad \text{(III-55)}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + B[u(k-1) + \Delta u(k)] \quad \text{(III-56)}$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad \text{(III-57)}$$

$$y(k) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Neste tipo de transformação, pode-se notar, pela equação **(III-57)**, que o novo estado terá dimensão de valor  $n_x + n_u$  e que os autovalores da nova matriz de estados serão os mesmos autovalores da matriz original A e  $n_u$  autovalores localizados no círculo unitário.

iii) Uma terceira forma de se obter um modelo na forma incremental é obtida escrevendo o estado definido em **(III-2)** em dois instantes distintos,  $k+1$  e  $k$ , e subtrair estas duas equações.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \end{aligned} \quad \text{(III-58)}$$

A saída do sistema indicado em **(III-58)** pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Cx(k+1) \\ y(k+1) &= C(\Delta x(k+1) + x(k)) \\ y(k+1) &= C\Delta x(k+1) + Cx(k) \end{aligned} \quad \text{(III-59)}$$

Utilizando a equação **(III-58)** na equação **(III-59)**, vem:

$$\begin{aligned}
y(k+1) &= C[A\Delta x(k) + B\Delta u(k)] + Cx(k) \\
y(k+1) &= CA\Delta x(k) + CB\Delta u(k) + Cx(k) \\
y(k+1) &= CA\Delta x(k) + CB\Delta u(k) + y(k)
\end{aligned}
\tag{III-60}$$

Combinando (III-58) e (III-60):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0_{ny} \\ CA & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \Delta u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 0_{nx} & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{III-61}$$

Neste caso, a nova matriz de estados possui dimensão  $n_x + n_y$  e os mesmos autovalores da matriz de estados original além de  $n_y$  autovalores em +1.

O motivo da apresentação desta seção foi ressaltar que, ao se mudar um modelo da forma posicional para a forma incremental, surgem polos adicionais referentes ao modelo incremental.

### III.2.3. Predição de estado no modelo incremental

A função objetivo de um controlador MPC requer o cálculo de uma predição de estados a partir do instante atual até o horizonte de predição considerado. Para um modelo na forma incremental, a predição pode ser feita da seguinte forma:

Para o instante  $k+1$ :

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + B\Delta u(k) \tag{III-62}$$

Para o instante  $k+2$ :

$$\begin{aligned}
x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + B\Delta u(k+1) \\
x(k+2|k) &= A[Ax(k|k) + B\Delta u(k)] + B\Delta u(k+1)
\end{aligned}
\tag{III-63}$$

$$x(k+2|k) = A^2x(k|k) + AB\Delta u(k) + B\Delta u(k+1)$$

E para um instante genérico  $k+j$ :

$$\begin{aligned}
x(k+j|k) &= A^jx(k|k) + A^{j-1}B\Delta u(k) + A^{j-2}B\Delta u(k+1) + \\
&A^{j-3}B\Delta u(k+2) + \dots + B\Delta u(k+j-1)
\end{aligned}
\tag{III-64}$$

Mas os valores de  $\Delta u$  a partir do instante  $m$  são nulos, ou seja:

$$\Delta u(k+m) = \Delta u(k+m+1) = \dots = \Delta u(k+m+np-1) = 0 \quad (\text{III-65})$$

Desta forma, a predição para a saída no instante genérico  $j$  fica:

$$y(k+j|k) = Cx(k+j|k) \quad (\text{III-66})$$

$$y(k+j|k) = CA^j x(k|k) + CA^{j-1} B \Delta u(k) + CA^{j-2} B \Delta u(k+1) + CA^{j-3} B \Delta u(k+2) + \dots + CB \Delta u(k+j-1) \quad (\text{III-67})$$

Supondo que o instante  $j$  seja  $m+1$ :

$$y(k+m+1|k) = CA^{m+1} x(k|k) + CA^m B \Delta u(k) + CA^{m-1} B \Delta u(k+1) + CA^{m-2} B \Delta u(k+2) + \dots + CAB \Delta u(k+m-1) + CB \Delta u(k+m) \quad (\text{III-68})$$

Mas, conforme **(III-65)**,  $\Delta u(k+m)$  é nulo. Então:

$$y(k+m+1|k) = CA^{m+1} x(k|k) + CA^m B \Delta u(k) + CA^{m-1} B \Delta u(k+1) + CA^{m-2} B \Delta u(k+2) + \dots + CAB \Delta u(k+m-1) \quad (\text{III-69})$$

Para o instante  $j$  igual a  $m+2$ , vem:

$$y(k+m+2|k) = CA^{m+2} x(k|k) + CA^{m+1} B \Delta u(k) + CA^m B \Delta u(k+1) + CA^{m-1} B \Delta u(k+2) + \dots + CA^2 B \Delta u(k+m-1) \quad (\text{III-70})$$

Generalizando para o instante de predição  $np$ :

$$y(k+np|k) = CA^{np} x(k|k) + CA^{np-1} B \Delta u(k) + CA^{np-2} B \Delta u(k+1) + CA^{np-3} B \Delta u(k+2) + \dots + CA^{np-m} B \Delta u(k+m-1) \quad (\text{III-71})$$

A equação matricial indicada em **(III-71)** define a predição das saídas até o horizonte de predição  $np$  para um sistema como indicado em **(III-2)**.

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+m|k) \\ y(k+m+1|k) \\ \vdots \\ y(k+np|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix} x(k) + \quad (III-72)$$

$$\begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \dots & CA^{np-m}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

Em notação matricial:

$$\bar{y}(k) = \tilde{\Psi}x(k) + \hat{\Theta}\Delta u_k \quad (III-73)$$

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^{np} \end{bmatrix}, \text{ matriz de observabilidade}$$

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{np-1}B & CA^{np-2}B & \dots & CA^{np-m}B \end{bmatrix}, \text{ matriz de controlabilidade}$$

#### III.2.4. Modelo do processo e o observador de estados

Em um MPC, o modelo em espaço de estados, vide equação (III-74), é combinado



com o observador de estados, vide equação **(III-75)**. Na equação **(III-75)**, pode-se observar que as matrizes de estado e de entrada utilizadas pelo observador não correspondem, necessariamente, às matrizes equivalentes do processo.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{III-74}$$

$$\hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) + K_F \left[ y(k+1) - C \left\{ \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) \right\} \right]\tag{III-75}$$

Substituindo **(III-74)** em **(III-75)** vem:

$$\hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) + K_F \left[ Cx(k+1) - C \left\{ \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) \right\} \right]\tag{III-76}$$

$$\hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) + K_F \left[ CAx(k) + CB\Delta u(k) - C \left\{ \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) \right\} \right]\tag{III-77}$$

O sistema que representa o processo e o observador de estados é indicado na equação matricial **(III-78)**.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - K_F C) \bar{A} & K_F CA \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} + K_F C (B - \bar{B}) \\ B \end{bmatrix} \Delta u(k)\tag{III-78}$$

O ganho do observador de estados deve ser tal que garanta que  $(I - K_F C) \bar{A}$  seja estável. Portanto, a estabilidade da malha passa a depender da escolha do estimador de estados. Se for possível a escolha de um conceito de estados que dispense o uso de estimador, ou seja, o estado medido diretamente do processo, esta escolha pode ser bastante conveniente para a questão de estabilidade do sistema planta e observador de estados; Isto foi feito neste trabalho.

### III.3. FILTRO DE KALMAN PARA ESTIMATIVA DO ESTADO DO SISTEMA

O objetivo da apresentação deste item neste trabalho será de tornar ainda mais clara a vantagem do uso de um estado mensurável, dispensando, dessa forma, o uso de estimadores de estado, o que torna mais simples a síntese do controlador e minimiza a possível de instabilidade da malha fechada quando uma ou mais restrições se tornarem ativas.

Quando, dentro da estrutura do MPC, forem utilizados modelos em variáveis de estado para representar o processo que está sendo controlado, surge a necessidade de se

estimar o estado do sistema a partir das medidas das variáveis controladas, que são as saídas do processo. Um dos estimadores de estado mais eficientes é o filtro de Kalman.

Considere um sistema linear representado pelo modelo em variáveis de estado segundo a equação **(III-79)**.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B u(k) + w(k) \\y(k) &= C x(k) + v(k)\end{aligned}\tag{III-79}$$

- $w(k)$  - Ruído randômico associado a erros de modelo
- $v(k)$  - Ruído randômico associado a erros de medição

A estimativa do filtro de Kalman (ASTRÖM e WITTENMARK, 1997) pode ser colocada na forma indicada em **(III-80)**.

$$\hat{x}(k+1|k) = A \hat{x}(k|k-1) + B u(k) + K(k) [y(k) - C \hat{x}(k|k-1)]\tag{III-80}$$

- $\hat{x}(k+1/k)$  - estimativa de  $x(k+1)$  baseada em informações da planta até o instante  $k$
- $K(k)$  - ganho do filtro

Os ruídos associados aos erros de modelo e de medição são admitidos como tendo valor esperado nulo e não serem correlacionados entre si e com nenhuma outra variável do sistema. O vetor  $y(k)$  é a saída medida, porém tem dimensão menor que o estado  $x(k)$ . Portanto, não se pode calcular diretamente o estado a partir da medida da saída. A última parcela indicada em **(III-80)** representa o feedback da diferença entre o valor real da saída e o valor estimado para a mesma.

O filtro de Kalman apresenta uma solução para a estimativa de  $x$  a partir do conhecimento de  $y$  e o erro dessa estimativa pode ser definido como:

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1/k)\tag{III-81}$$

- $\tilde{x}(k+1)$  - Erro da estimativa de  $x(k+1)$

Seja  $P(k)$  a matriz de covariância do erro estimado indicado em **(III-81)**. Para um valor de  $k$  suficientemente grande,  $K(k)$  e  $P(k)$  convergem para valores estacionários dados por:

$$K = APC^T (V + CPC^T)^{-1} \quad \text{(III-82)}$$

$$P \quad - \quad P = APA^T - APC^T [V + CPC^T]^{-1} CPA^T + W$$

$$W \quad - \quad W = E[w(k)w(k)^T]$$

$$E[ \ ] \quad - \quad \text{Valor esperado}$$

$$V \quad - \quad V = E[v(k)v(k)^T]$$

A equação (III-82) mostra o ganho do filtro de Kalman que pode ser aplicado à equação (III-80), obtendo um estimador que estabiliza o modelo do processo considerado pelo MPC. No entanto, o fato de utilizarmos um estimador estável e um controlador também estável só garante a estabilidade da malha fechada se o controlador for linear. Ao se alcançar as restrições de um processo, por exemplo, o controlador torna-se não linear e esta garantia não é mais uma verdade, pois não é mais satisfeito o princípio da separação. Como, normalmente, um processo industrial tem seu ponto ótimo nas restrições, esta desvantagem apresentada pelo uso do observador de estados pode ser bastante inconveniente. Por isto, este trabalho propõe o uso do conceito de um estado mensurável, dispensando o uso do estimador de estados.

#### III.4. O MPC DE HORIZONTE INFINITO E A ESTABILIDADE GARANTIDA

RAWLINGS e MUSKE (1993) apresentaram uma proposta de implementação de um controlador de horizonte de predição infinita. Seja o sistema indicado na equação (III-83), com o estado medido.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad \text{(III-83)}$$

$$C \quad - \quad \text{Como o estado é medido, } C = I$$

$$x \quad - \quad \text{Variável de desvio em relação ao estado estacionário}$$

$$u \quad - \quad \text{Variável de desvio em relação à entrada em regime estacionário}$$

Seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min J_k = & \sum_{j=0}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \end{aligned} \quad (\text{III-84})$$

s.a.

$$\begin{aligned} u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ u(k+j|k) = 0, \quad j \geq m \end{aligned}$$

A função objetivo expressa em **(III-84)** pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \min J_k = & \sum_{j=0}^m x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + \sum_{j=m+1}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + \\ & \sum_{j=0}^{m-1} u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \end{aligned} \quad (\text{III-85})$$

Aplicando a segunda restrição no modelo indicado em **(III-83)**, vem:

$$x(k+m+j|k) = A^j x(k+m|k) \quad (\text{III-86})$$

Dessa forma, utilizando a equação **(III-86)** na soma infinita indicada em **(III-85)**, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) &= \sum_{j=1}^{\infty} x(k+m|k)^T A^{jT} Q A^j x(k+m|k) = \\ x(k+m|k)^T \sum_{j=1}^{\infty} A^{jT} Q A^j x(k+m|k) &= x(k+m|k)^T P x(k+m|k) \end{aligned} \quad (\text{III-87})$$

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} A^{jT} Q A^j \quad (\text{III-88})$$

Na definição apresentada em **(III-88)**, podem-se multiplicar ambos os termos por  $A^T [ \ ] A$ , e obtém-se:

$$A^T P A = \sum_{j=2}^{\infty} A^{jT} Q A^j \quad (\text{III-89})$$

Subtraindo **(III-89)** de **(III-88)**, vem:

$$P - A^T P A = A^T Q A - A^{\infty T} Q A^{\infty} \quad (\text{III-90})$$

Quando o sistema é estável,  $A^{\infty}$  tende a zero, e obtém-se a equação de Lyapunov:

$$P - A^T P A = A^T Q A \quad (\text{III-91})$$

Utilizando (III-87) em (III-85):

$$\min_{u_k} J_k = \sum_{j=0}^m x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + x(k+m|k)^T P x(k+m|k) + \sum_{j=0}^{m-1} u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \quad (\text{III-92})$$

s.a.

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$u(k+j|k) = 0, \quad j \geq m$$

#### III.4.1. Teorema

A função definida em (III-92) ou em (III-84) é uma função de Lyapunov do sistema definido em (III-83) em malha fechada, com o controlador definido pela solução do problema (III-92).

#### III.4.2. Prova

Seja  $[u^*(k|k) \quad u^*(k+1|k) \quad \dots \quad u^*(k+m-1|k)]$  a solução ótima do problema indicado em (III-92) e  $J_k^*$  o valor ótimo de  $J_k$ . Desta forma, pode-se afirmar que:

$$J_k^* = \sum_{j=0}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + \sum_{j=0}^{m-1} u^*(k+j|k)^T R u^*(k+j|k) \quad (\text{III-93})$$

$$J_k^* = x(k|k)^T Q x(k|k) + \sum_{j=1}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + u^*(k|k)^T R u^*(k|k) + \sum_{j=1}^{m-1} u^*(k+j|k)^T R u^*(k+j|k) \quad (\text{III-94})$$

$$J_k^* - x(k|k)^T Q x(k|k) - u^*(k|k)^T R u^*(k|k) = \sum_{j=1}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + \sum_{j=1}^{m-1} u^*(k+j|k)^T R u^*(k+j|k) \quad (\text{III-95})$$

Se  $u^*(k|k)$  for aplicado ao sistema (III-83) e não houver nenhum distúrbio, então, no

instante  $k+1$  seguinte, a sequência  $\left[ u^*(k+1|k) \ \cdots \ u^*(k+m-1|k) \ 0 \right]$  será uma solução viável para o problema **(III-92)**. Para esta sequência de controle e, tomando como fins didáticos para a demonstração a existência de um termo infinito deslocado de um, o valor de  $J_{k+1}$  será:

$$J_{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty+1} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + \sum_{j=1}^{m-1} u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \quad \text{(III-96)}$$

Substituindo **(III-95)** em **(III-96)** e, lembrando que pelo sistema ser estável o termo em  $x(k+\infty+1|k)$  é nulo, vem:

$$J_{k+1} = J_k^* - x(k|k)^T Q x(k|k) - u^*(k|k)^T R u^*(k|k) \quad \text{(III-97)}$$

Como  $Q$  e  $R$  são positivos, pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} \leq J_k^* \quad \text{(III-98)}$$

A solução ótima para o problema **(III-92)** ou **(III-84)** será menor ou igual à solução viável. Portanto:

$$J_{k+1}^* \leq J_{k+1} \leq J_k^* \quad \text{(III-99)}$$

A relação indicada em **(III-99)** mostra que, a menos que o sistema **(III-83)** esteja em  $(x, u) = (0, 0)$ ,  $J_k$  é uma função decrescente e o sistema **(III-83)** é assintoticamente estável.

### III.4.3. Problemas

A formulação proposta no item **(III.4)** não engloba o caso em que o sistema tem uma perturbação não medida, onde neste caso o estado estacionário não seria conhecido. Também não poderia ser diretamente utilizado no caso de um modelo na forma incremental, tendo em vista que  $A^j$  não tende para zero quando  $j$  tende a infinito.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad \text{(III-74)}$$

Isto ocorre porque, conforme item **(III.2)**, na transformação para o modelo incremental aparecem autovalores na matriz de estados em  $+1$ .

### III.4.4. Solução

Para contornar o problema do modelo na forma incremental, pode-se considerar a seguinte transformação:

$$A = VDV^{-1} \quad \text{(III-100)}$$

- $D$  - Matriz diagonal que contém os autovalores de  $A$   
 $V$  - Matriz cujas colunas são os autovetores de  $A$

A matriz  $D$  pode ser representada como:

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_y} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_A} \end{bmatrix} \quad \text{(III-101)}$$

- $\lambda_i$  - Autovalor estável  $i$  de  $A$

A partir desta conceituação, pode-se definir um novo estado através da seguinte transformação:

$$x(k) = Vz(k) \quad \text{(III-102)}$$

Substituindo (III-102) em (III-74):

$$Vz(k+1) = AVz(k) + B\Delta u(k) \quad \text{(III-103)}$$

$$z(k+1) = V^{-1}AVz(k) + V^{-1}B\Delta u(k) \quad \text{(III-104)}$$

$$z(k+1) = Dz(k) + V^{-1}B\Delta u(k) \quad \text{(III-105)}$$

Considerando que novos incrementos nas variáveis manipuladas são nulos após o horizonte de controle  $m$ , pode-se generalizar (III-105) para a predição dos instantes futuros após este horizonte de controle.

$$z(k+m+j) = D^j z(k+m) \quad \text{(III-106)}$$

Retornando a soma infinita indicada em (III-87) e aplicando a transformação de estados:

$$S = \sum_{j=m+1}^{\infty} x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) = \sum_{j=m+1}^{\infty} [Vz(k+j|k)]^T Q Vz(k+j|k) = \quad (\text{III-107})$$

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} z(k+j|k)^T V^T Q Vz(k+j|k) = \sum_{j=1}^{\infty} z(k+m+j|k)^T V^T Q Vz(k+m+j|k)$$

Utilizando a predição de **(III-106)** em **(III-107)**:

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} z(k+m|k)^T D^{jT} V^T Q V D^j z(k+m|k) \quad (\text{III-108})$$

$$S = z(k+m|k)^T \left[ \sum_{j=1}^{\infty} D^{jT} V^T Q V D^j \right] z(k+m|k) \quad (\text{III-109})$$

Devido à presença de polos em +1 na matriz de estados do sistema **(III-74)**, a soma indicada em **(III-109)** não é finita.

O novo estado definido  $z$  pode ser decomposto em duas parcelas: uma relacionada com os polos integradores do modelo e outra relacionada com os polos estáveis do sistema.

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_i(k) \\ z_e(k) \end{bmatrix} \quad (\text{III-110})$$

- $z_i(k)$  - Polos integradores do modelo incremental de  $A$ ,  $z_i \in \mathbb{R}^{n_y}$
- $z_e(k)$  - Polos estáveis da matriz de estados  $A$ ,  $z_e \in \mathbb{R}^{n_A}$

$$z_i(k) = \widehat{N} z(k) \quad (\text{III-111})$$

- $\widehat{N}$  -  $\begin{bmatrix} I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}$ , admitindo-se que o processo para obtenção do modelo incremental tenha gerado  $n_y$  polos em +1.

Pode-se tornar a soma indicada em **(III-109)** finita impondo-se que:

$$z_i(k+m|k) = 0 \quad (\text{III-112})$$

Usando **(III-105)** recursivamente, tem-se que:

$$z(k+m|k) = D^m z(k) + D^{m-1} V^{-1} B \Delta u(k|k) + D^{m-2} V^{-1} B \Delta u(k+1|k) + \quad (\text{III-113})$$

$$\dots + V^{-1} B \Delta u(k+m-1|k)$$



$$z(k+m|k) = D^m V^{-1} x(k) + \bar{B} \Delta u_k \quad (\text{III-114})$$

$$\begin{aligned} \bar{B} & - \left[ D^{m-1} V^{-1} B \quad D^{m-2} V^{-1} B \quad \dots \quad V^{-1} B \right] \\ \Delta u_k & - \left[ \Delta u(k|k)^T \quad \Delta u(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u(k+m-1|k)^T \right]^T \end{aligned}$$

Portanto, a restrição em **(III-112)** corresponde a:

$$z_i(k+m|k) = \hat{N} z(k+m|k) = \hat{N} \left[ D^m V^{-1} x(k) + \bar{B} \Delta u_k \right] = 0 \quad (\text{III-115})$$

$$\hat{N} D^m V^{-1} x(k) + \hat{N} \bar{B} \Delta u_k = 0 \quad (\text{III-116})$$

Como consequência da restrição imposta em **(III-116)**, vem:

$$S = z(k+m|k)^T \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \bar{D}^{jT} V^T Q V \bar{D}^j \right] z(k+m|k) = z(k+m|k)^T \bar{P} z(k+m|k) \quad (\text{III-117})$$

$$\bar{P} - \sum_{j=1}^{\infty} \bar{D}^{jT} V^T Q V \bar{D}^j$$

$$\bar{D} - \text{Matriz diagonal com apenas os autovalores estáveis do sistema}$$

Desta forma, a função objetivo indicada em **(III-84)**, com o modelo na forma incremental, pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \min_{u_k} J_k & = \sum_{j=0}^m x(k+j|k)^T Q x(k+j|k) + x(k+m|k)^T \bar{P} x(k+m|k) + \\ & \sum_{j=0}^{m-1} u(k+j|k)^T R u(k+j|k) \end{aligned} \quad (\text{III-118})$$

s.a.

$$N D^m V^{-1} x(k) + N \bar{B} \Delta u_k = 0$$

A formulação apresentada neste item será muito útil ao longo deste trabalho. A idéia básica será sempre separar os polos instáveis dos polos estáveis para evitar a soma sem limites da função objetivo do IHMPC. Os modos estáveis tendem a zero, limitando a soma infinita da função. Os modos integradores são zerados a partir de uma restrição em um determinado instante no futuro que, neste item, foi o horizonte de controle.

## IV. CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL COM MODELO DE REALINHAMENTO

Este capítulo apresenta uma revisão do conceito de estado definido por MACIEJOWSKI (2002) e o uso deste estado com o modelo escrito na forma incremental, proposto por PEREZ (2006).

### IV.1. MODELO DE REALINHAMENTO

MACIEJOWSKI (2002) propôs um modelo em variáveis de estado não mínimo que é conveniente para o desenvolvimento de um MPC robusto com realimentação de saída. Para entender como esse modelo é montado, a equação de diferenças **(IV-1)**, que corresponde a uma função de transferência discreta, pode ser considerada.

$$y(k) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^{nb} b_i u(k-i) \quad \text{(IV-1)}$$

- $na$  - Ordem do modelo – número de saídas passadas consideradas na equação de diferenças
- $nb$  - Número de entradas passadas consideradas na equação de diferenças
- $a_i$  - Coeficientes da equação de diferenças,  $a_i \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $b_i$  - Coeficientes da equação de diferenças,  $b_i \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$
- $y$  - Saídas do modelo,  $y \in \mathbb{R}^{ny}$
- $u$  - Entradas do modelo,  $u \in \mathbb{R}^{nu}$

MACIEJOWSKI (2002) propõe que o estado seja composto pelas variáveis de entrada e de saída nos instantes de tempo que aparecem na equação **(IV-1)**, ou seja, pelas últimas  $na$  leituras das saídas da planta e pelas últimas  $nb$  ações de controle. Apesar deste estado, proposto por MACIEJOWSKI (2002), ser um estado não mínimo (PEREZ, 2006), ele é interessante pela sua simplicidade e por não envolver a necessidade de um estimador de estados.

Portanto, a partir do modelo **(IV-1)**, pode-se calcular o valor de saída no instante  $k$  seguinte. Para compor o estado, nesse instante, uma matriz de realinhamento adequada desloca os valores de saída e de entrada passados em um instante de

tempo para trás, como indicado na equação **(IV-2)**.

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na+1) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-nb+2) \\ u(k-nb+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{na-1} & -a_{na} & b_2 & \cdots & b_{nb-2} & b_{nb-1} & b_{nb} \\ I_{ny} & 0_{ny} & \cdots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny} & I_{ny} & \cdots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny} & 0_{ny} & \cdots & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & I_{nu} & \cdots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & \cdots & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} \quad \text{(IV-2)}$$

$$\times \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na+1) \\ y(k-na) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-nb+2) \\ u(k-nb+1) \\ u(k-nb) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ \vdots \\ 0_{ny \times nu} \\ I_{nu} \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \\ 0_{nu} \end{bmatrix} u(k-1)$$

A equação correspondente à equação **(IV-2)**, em uma notação mais compacta, é indicada na equação **(IV-3)**.

$$x(k) = \tilde{A}x(k-1) + \tilde{B}u(k-1) \quad \text{(IV-3)}$$

$$y(k) = \tilde{C}x(k)$$

- $x(k)$  - Estado no instante  $k$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}^{(na.ny+(nb-1).nu)}$
- $\tilde{A}$  - Matriz de estados,  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(na.ny+(nb-1).nu) \times (na.ny+(nb-1).nu)}$ ,
- $\tilde{B}$  - Matriz de entrada,  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(na.ny+(nb-1).nu) \times nu}$
- Matriz de saídas,  $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{ny \times (na.ny+(nb-1).nu)}$
- $\tilde{C}$  -  $\tilde{C} = \underbrace{[I_{ny} \ 0_{ny} \ \cdots \ 0_{ny}]}_{na} \underbrace{[0_{ny \times nu} \ 0_{ny \times nu} \ \cdots \ 0_{ny \times nu}]}_{nb-1}$
- $y$  - Saídas do modelo,  $y \in \mathbb{R}^{ny}$
- $u$  - Entradas do modelo,  $u \in \mathbb{R}^{nu}$

O estado definido por MACIEJOWSKI (2002) passa a ser constituído pelas últimas  $na$  leituras da planta e as últimas  $nb-1$  ações aplicadas ao processo, conforme indicado em **(IV-4)**.

$$[x]_{k|k} = [y(k)^T \ y(k-1)^T \ \cdots \ y(k-na+1)^T \ u(k-1)^T \ u(k-2)^T \ \cdots \ u(k-nb+2)^T \ u(k-nb+1)^T]^T \quad \text{(IV-4)}$$

Este modelo tem como vantagem o fato de envolver apenas variáveis medidas e que são conhecidas a cada instante de amostragem  $k$ , evitando, desta forma, a necessidade da inclusão de um observador de estados na malha de controle. OGATA (1997) recomenda o uso de estados que sejam medidos facilmente, já que muitas leis de controle requerem a realimentação destes estados ao controlador com um peso apropriado.

Desta forma, o sistema se torna sempre observável. WANG e RAWLINGS (2004) utilizaram esse modelo para propor um MPC robusto com realimentação de saída, mas, devido à estrutura da árvore de possibilidades crescer exponencialmente com o horizonte de predição, o esforço computacional torna-o de difícil implantação industrial.

A desvantagem das equações de espaço de estado proposta por MACIEJOWSKI (2002) é o fato de que o modelo seja posicional, o que pressupõe um conhecimento do estado estacionário e a lei de controle obtida tolera um erro permanente (PEREZ, 2006).

## **IV.2. MODELO DE REALINHAMENTO NA FORMA INCREMENTAL**

PEREZ (2006) propôs a alteração do modelo de MACIEJOWSKI (2002) para a forma incremental. Desta forma, o modelo foi alterado conforme a equação **(IV-5)**. A matriz de estados definida neste modelo é de posto deficiente, pois a matriz obtida é singular e, portanto, não inversível.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix}
-a_1 + I_{ny} & -a_2 + a_1 & -a_3 + a_2 & -a_4 + a_3 & \dots & -a_{na} + a_{na-1} & a_{na} & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{nb} \\
I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\
0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\
0_{ny} & 0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} & \dots & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \dots & 0_{ny \times nu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} & \dots & I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\
0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\
0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\
0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\
0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \dots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu}
\end{bmatrix}
\times x(k) + \begin{bmatrix}
b_1 \\
0_{ny \times nu} \\
0_{ny \times nu} \\
0_{ny \times nu} \\
\dots \\
0_{ny \times nu} \\
I_{nu} \\
0_{nu} \\
0_{nu} \\
0_{nu} \\
\dots \\
0_{nu}
\end{bmatrix} \Delta u(k)$$

(IV-5)

Escrevendo na notação mais compacta de espaço de estado, a predição de estados pode ser representada pela equação (IV-6).

$$\begin{aligned}
x(k+1|k) &= A x(k|k) + B \Delta u(k) \\
y(k|k) &= C x(k|k)
\end{aligned}
\tag{IV-6}$$

- $x(k)$  - Estado no instante  $k$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}^{nx}$ ,  $nx = (na.ny + (nb-1).nu)$
- Matriz de estados,
- $A$  -  $A \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$
- $B$  - Matriz de entrada,  $B \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times nu}$
- $C$  - Matriz de saídas,  $C \in \mathbb{R}^{ny \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$
- $y$  - Saídas do modelo,  $y \in \mathbb{R}^{ny}$
- $\Delta u$  - Entradas do modelo,  $\Delta u \in \mathbb{R}^{nu}$

Neste caso, o estado passa a ser indicado pelas últimas  $na+1$  saídas e pelas últimas  $nb-1$  entradas aplicadas ao processo, conforme a equação (IV-7).

$$x(k) = \left[ y(k)^T \quad y(k-1)^T \quad y(k-2)^T \quad \dots \quad y(k-na)^T \quad \Delta u(k-1)^T \quad \dots \quad \Delta u(k-nb+1)^T \right]^T \tag{IV-7}$$

Observando a transformação do modelo posicional para incremental, verifica-se que surgem  $ny$  polos integradores nesta operação, conforme:

$$\Delta \begin{cases} y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + a_3 y(k-2) + \dots + a_{na} y(k-na+1) = \\ b_1 u(k) + b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb+1) \\ y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) + \dots + a_{na} y(k-na) = \\ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) + \dots + b_{nb} u(k-nb) \end{cases}$$

$$y(k+1) = y(k)(I_{ny} - a_1) + y(k-1)(-a_2 + a_1) + y(k-2)(-a_3 + a_2) + \dots + y(k-na+1)(-a_{na} + a_{na-1}) + a_{na} y(k-na) + b_1 \Delta u(k) + b_2 \Delta u(k-1) + b_3 \Delta u(k-2) + \dots + b_{nb} \Delta u(k-nb+1) \quad (\text{IV-8})$$

Pelas equações indicadas em **(IV-8)**, além dos autovalores já existente na matriz de estados  $\tilde{A}$ , foram adicionados  $ny$  polos integradores a esta equação de diferenças. Outra característica da matriz  $A$ , que foi obtida na equação **(IV-5)**, é a existência de  $nu$  linhas com zeros, caracterizando que esta matriz não é inversível, tendo em vista que seu determinante é nulo, sendo, portanto uma matriz singular, o que implica em uma matriz de posto incompleto ou deficiente.

O estado, indicado na equação **(IV-7)** pode ser representado, de forma simplificada, em duas parcelas, tais como indicado na equação **(IV-9)**.

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na) \\ \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_y(k) \\ x_{\Delta u}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

$x_y(k)$  - Parcela do estado referente às saídas no instante  $k$ ,  
 $x_y(k) \in \mathbb{R}^{(na+1).ny}$

$x_{\Delta u}(k)$  - Parcela do estado referente às entradas no instante  $k$ ,  
 $x_{\Delta u}(k) \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu}$

Da mesma forma, a matriz de estados  $A$  também pode ser dividida em 4 outras matrizes, conforme as equações **(IV-10)**, **(IV-11)**, **(IV-12)** e **(IV-13)**.

$$A = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-10})$$

$$A_y = \begin{bmatrix} (I - A_1) & (A_1 - A_2) & \cdots & (A_{na-1} - A_{na}) & A_{na} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \end{bmatrix}, A_y \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times (na+1).ny}, \quad (\text{IV-11})$$

$A_i \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$

$$A_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_2 & \cdots & B_{nb} \\ 0_{ny \times nu} & \vdots & 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} & \vdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \end{bmatrix}, A_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times (nb-1).nu}, B_i \in \mathbb{R}^{ny \times nu} \quad (\text{IV-12})$$

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} & \cdots & 0_{nu \times ny} & 0_{nu \times ny} \end{bmatrix}, \underline{0} \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu \times (na+1).ny} \quad (\text{IV-13})$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 0_{nu \times nu} & \cdots & 0_{nu \times nu} \\ I_{nu \times nu} & \cdots & 0_{nu \times nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{nu \times nu} & I_{nu \times nu} & 0_{nu \times nu} \end{bmatrix}, \underline{I} \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu \times (nb-1).nu} \quad (\text{IV-14})$$

- $A_y$  - Componente da matriz de estados que modifica as saídas do processo,  $A_y \in \mathbb{R}^{((na+1).ny \times (na+1).ny)}$
- $A_{\Delta u}$  - Componente da matriz de estados que modifica as entradas do processo,  $A_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{((na+1).ny \times (nb-1).nu)}$
- $\underline{0}$  - Matriz de zeros,  $\underline{0} \in \mathbb{R}^{((nb-1).nu \times (na+1).ny)}$
- $\underline{I}$  - Matriz de deslocamento das ações de controle,  $\underline{I} \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu \times (nb-1).nu}$

Ainda na equação (IV-6), a matriz de entrada  $B$  também pode ser representada de forma sucinta, conforme as equações (IV-15), (IV-16) e (IV-17).

$$B = \begin{bmatrix} B_{\Delta u} \\ \bar{I} \end{bmatrix}, B \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times nu} \quad (\text{IV-15})$$

$$B_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ 0_{ny \times nu} \\ \vdots \\ 0_{ny \times nu} \end{bmatrix}, B_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times nu} \quad (\text{IV-16})$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{nu} \\ 0_{nu} \\ \vdots \\ 0_{nu} \end{bmatrix}, \bar{I} \in \mathbb{R}^{[(nb-1).nu] \times nu} \quad (\text{IV-17})$$

- $B_{\Delta u}$  - Componente da matriz de entrada que modifica as entradas aplicadas ao processo,  $B_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{((na+1).ny) \times nu}$
- $\bar{I}$  - Componente de deslocamento a última ação de controle calculada para compor o próximo estado,  $\bar{I} \in \mathbb{R}^{((nb-1).nu) \times nu}$

A matriz de saída  $C$ , indicada na equação (IV-6), também pode ser decomposta como indicado nas equações (IV-18), (IV-19) e (IV-20).

$$C = [C_y \quad C_{\Delta u}], \quad (\text{IV-18})$$

$$C_y = [I_{ny \times ny} \quad 0_{ny \times ny} \quad \cdots \quad 0_{ny \times ny}], \quad (\text{IV-19})$$

$$C_{\Delta u} = [0_{ny \times nu} \quad 0_{ny \times nu} \quad \cdots \quad 0_{ny \times nu}], \quad (\text{IV-20})$$

- $C_y$  - Componente da matriz de saídas que recupera a partir do estado atual as saídas de interesse do processo,  $C_y \in \mathbb{R}^{(ny \times (na+1).ny)}$
- $C_{\Delta u}$  - Componente da matriz de saídas que compõe a saída atual a partir da parte de entradas passados do estado atual,  $C_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{(ny \times (nb-1).nu)}$

Desta forma, a equação (IV-6) pode ser escrita conforme indicado na equação (IV-21).



$$\begin{bmatrix} x_y(k+1|k) \\ x_{\Delta u}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (\text{IV-21})$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_y & C_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix}$$

O anexo I mostra as propriedades da matriz de estados do modelo incremental obtido. Estas propriedades serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Após um intervalo de tempo correspondente a  $n = m + nb - 1$ , neste trabalho definido como horizonte de controle estendido, as ações sobre a planta de processo serão nulas e o histórico dessas ações no estado definido também serão nulas, simplificando a equação de predição, conforme será visto a seguir.

## V. IHMPC COM MODELO DE REALINHAMENTO PARA SISTEMAS ESTÁVEIS

---

### V.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a formulação de um controlador de horizonte infinito utilizando o modelo apresentado no capítulo IV em sistemas estáveis. Inicialmente o controlador será desenvolvido apenas para o caso nominal, onde o modelo do controlador é igual ao modelo do processo e, logo a seguir, estendido para o caso multimodelo.

### V.2. TRANSFORMAÇÃO E PREDIÇÃO DE ESTADOS

Conforme descrito no capítulo IV e anexo I, após um horizonte de predição equivalente a  $n = m + nb - 1$ , o sistema representado por (IV-6) se transforma no sistema indicado em (V-1).

$$\begin{bmatrix} x_y(k+n+1) \\ x_{\Delta u}(k+n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k+n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-1})$$

De (V-1) conclui-se que:

$$x_y(k+n+1) = A_y x_y(k+n) \quad (\text{V-2})$$

$$x_{\Delta u}(k+n+1) = 0 \quad (\text{V-3})$$

A matriz  $A_y$  é de posto pleno e não singular. Desta forma, é possível aplicar a seguinte transformação de estados na equação (V-2):

$$A_y V = V A_d \quad (\text{V-4})$$

- $V$  - Autovetores de  $A_y$ ,  $V = \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times (na+1).ny}$
- $A_d$  - Autovalores de  $A$ ,  $A_d \in \mathbb{R}^{((na+1).ny) \times ((na+1).ny)}$

A matriz diagonal, com os autovalores de  $A_y$  separados em instáveis e estáveis, pode

ser representada da seguinte forma:

$$A_d = V^{-1}A_y V \quad (\text{V-5})$$

$$A_d = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st} \end{bmatrix} \quad (\text{V-6})$$

- $I_{ny}$  - Polos integradores do modelo incremental de  $A_y$
- $F^{st}$  - Polos estáveis do processo relacionado à matriz  $A_y$

A relação existente entre o estado transformado  $z$  e o estado real  $x$  é mostrada em **(V-7)**.

$$x_y(k) = Vz(k) \quad (\text{V-7})$$

Como a matriz de autovetores  $V$  é inversível, a recíproca da relação expressa em **(V-7)** é verdadeira:

$$z(k) = V^{-1}x_y(k) \quad (\text{V-8})$$

Nas equações **(V-7)** e **(V-8)** é possível separar os autovetores estáveis dos autovetores instáveis do modelo.

$$x_y(k) = \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k) \\ z^{st}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{V-9})$$

- $V^i$  - Autovetores dos polos integradores de  $A_y$ ,  
 $V^i \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times ny}$
- $V^{st}$  - Autovetores dos polos estáveis de  $A_y$ ,  
 $V^{st} \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times na.ny}$

$$\begin{bmatrix} z^i \\ z^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in}^i \\ V_{in}^{st} \end{bmatrix} x_y(k) \quad (\text{V-10})$$

- $V_{in}^i$  - Inversa dos autovetores dos polos integradores de  $A_y$ ,  
 $V_{in}^i \in \mathbb{R}^{ny \times (na+1).ny}$
- $V_{in}^{st}$  - Inversa dos autovetores dos polos estáveis de  $A_y$ ,  
 $V_{in}^{st} \in \mathbb{R}^{na.ny \times (na+1).ny}$

A predição no estado transformado  $z$  para o instante  $k+n+j$  genérico, por exemplo,

seria:

$$z(k+n+j) = \begin{bmatrix} z^i(k+n+j) \\ z^{st}(k+n+j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st^j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n) \\ z^{st}(k+n) \end{bmatrix} = A_d^j z(k+n) \quad (\text{V-11})$$

Baseado na propriedade 5 do anexo I e na equação (V-3), pode-se escrever:

$$x_y^{sp} = \bar{I} y^{sp}, x_y^{sp} \in \mathbb{R}^{(na+1),ny} \quad (\text{V-12})$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{ny \times ny} \\ \vdots \\ I_{ny \times ny} \end{bmatrix}, \bar{I} \in \mathbb{R}^{(na+1),ny \times ny}$$

Aplicando em (V-1) a transformação de estados definida em (V-10), vem:

$$\begin{bmatrix} z^{i,sp} \\ z^{st,sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in}^i \\ V_{in}^{st} \end{bmatrix} x_y^{sp} \quad (\text{V-13})$$

### V.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC

A função objetivo proposta para o controlador, indicada em (V-14), é um somatório infinito dos erros elevados ao quadrado e ponderados e de um somatório das ações sobre as variáveis manipuladas, na forma incrementada, elevadas ao quadrado, e também ponderadas por um fator conhecido como fator de supressão de movimento, ao longo do horizonte de controle. Ambas as parcelas são ponderadas de forma distinta para cada variável de controle e para cada variável manipulada. Uma característica da função objetivo proposta em (V-14) é estar com as entradas aplicadas ao processo na forma incremental, ao invés da forma posicional como apresentado por RAWLINGS e MUSKE (1993), como mostrado no item (III.4).

$$J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} \right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \Delta u(k+j|k) \right]^T R \left[ \Delta u(k+j|k) \right] \quad (\text{V-14})$$

- $J_k$  - Função de custo para o instante  $k$
- $x(k+j|k)$  - Predição para o estado feita no instante  $k$  para o instante  $k+j$

- $\Delta u(k+j|k)$  - Predição para a saída feita no instante  $k$  para o instante  $k+j$   
 $Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas,  
 $Q \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$   
 $R$  - Matriz de supressão das variáveis manipuladas,  $R \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$

A soma infinita apresentada em **(V-14)** pode ser decomposta em duas parcelas: a primeira até o horizonte de controle estendido  $n$ , que corresponde a  $m+nb-1$ , e a segunda deste instante até infinito.

$$S = S_1 + S_\infty = \sum_{j=1}^n [Cx(k+j|k) - y^{sp}]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp}] + \sum_{j=n+1}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp}]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp}] \quad (\text{V-15})$$

Analisando a soma infinita de **(V-15)**, vem:

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} [Cx(k+n+j|k) - y^{sp}]^T Q [Cx(k+n+j|k) - y^{sp}] \quad (\text{V-16})$$

No instante considerado em **(V-16)** é válida a relação em **(V-2)** e **(V-3)**. Portanto:

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} [C_y x_y(k+n+j|k) - y^{sp}]^T Q [C_y x_y(k+n+j|k) - y^{sp}] \quad (\text{V-17})$$

$$C_y \quad - \quad C_y = \begin{bmatrix} I_{ny} & \cdots & 0_{ny} \end{bmatrix}, C_y \in \mathbb{R}^{ny \times (na+1)ny}$$

Aplicando-se a transformação de estados indicada em **(V-7)** na equação **(V-17)**:

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} [C_y V z(k+n+j|k) - y^{sp}]^T Q [C_y V z(k+n+j|k) - y^{sp}] \quad (\text{V-18})$$

Como a equação **(V-18)** está expressa no estado transformado, é possível separar-se os polos estáveis dos polos integradores provenientes do modelo na forma incremental.

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V \begin{bmatrix} z^i(k+n+j|k) \\ z^{st}(k+n+j|k) \end{bmatrix} - y^{sp} \right]^T Q \left[ C_y V \begin{bmatrix} z^i(k+n+j|k) \\ z^{st}(k+n+j|k) \end{bmatrix} - y^{sp} \right] \quad (\text{V-19})$$

Separando-se os autovetores como foi indicado em **(V-9)** e realizando a operação algébrica resultante, tem-se:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n+j|k) \\ z^{st}(k+n+j|k) \end{bmatrix} - y^{sp} \right]^T Q \quad (\text{V-20})$$

$$\left[ C_y \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n+j|k) \\ z^{st}(k+n+j|k) \end{bmatrix} - y^{sp} \right]$$

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V^i z^i(k+n+j|k) + C_y V^{st} z^{st}(k+n+j|k) - y^{sp} \right]^T Q \quad (\text{V-21})$$

$$\left[ C_y V^i z^i(k+n+j|k) + C_y V^{st} z^{st}(k+n+j|k) - y^{sp} \right]$$

Portanto, para que a soma  $S_{\infty}$  seja limitada, a restrição deve recair sobre a parte instável dos polos, tendo em vista que, conforme demonstrado no item (III.4), a soma infinita da parte estável é limitada. Para isso, é necessário impor a seguinte condição ao problema de otimização:

$$C_y V^i z^i(k+n+j|k) - y^{sp} = 0 \quad (\text{V-22})$$

Pela equação apresentada em (V-11), pode-se inferir que:

$$z^i(k+n+j|k) = z^i(k+n|k), \quad j \geq 1 \quad (\text{V-23})$$

Portanto, a restrição indicada em (V-22), também pode ser escrita como:

$$C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} = 0 \quad (\text{V-24})$$

Satisfazendo a restrição (V-22), a soma infinita (V-21) se limita a:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} z^{st}(k+n+j|k)^T V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} z^{st}(k+n+j|k) \quad (\text{V-25})$$

Lembrando da equação de predição para o estado  $z$  indicada em (V-11) e, separando esta predição para a parte estável, vem:

$$z^{st}(k+n+1|k) = F^{st} z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-26})$$

Generalizando esta predição para um instante  $j$ , vem:

$$z^{st}(k+n+j|k) = \left[ F^{st} \right]^j z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-27})$$

Substituindo (V-27) em (V-25), tem-se que:

$$S_{\infty} = z^{st}(k+n|k)^T \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [F^{st}]^{jT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} [F^{st}]^j \right\} z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-28})$$

Define-se:

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} [F^{st}]^{jT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} [F^{st}]^j \quad (\text{V-29})$$

Multiplicando (V-29) por  $[F^{st}]^T [ \ ] [F^{st}]$ :

$$[F^{st}]^T P [F^{st}] = \sum_{j=2}^{\infty+1} [F^{st}]^{jT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} [F^{st}]^j \quad (\text{V-30})$$

Subtraindo (V-29) de (V-30):

$$[F^{st}]^T P [F^{st}] - P = -[F^{st}]^T V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} [F^{st}] \quad (\text{V-31})$$

A equação indicada em (V-31) é uma equação de Lyapunov. A matriz  $P$  pode ser obtida por um processo recursivo ou pela função *dlyap* do Matlab durante a configuração *off-line* do controlador.

Desta forma, a soma infinita escrita em (V-28) se transforma em:

$$S_{\infty} = z^{st}(k+n|k)^T P z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-32})$$

Lembrando a relação entre os estados descrita em (V-8) e a seguir reapresentada para o instante de predição igual ao horizonte de controle estendido  $n$ :

$$z(k+n|k) = V^{-1} x_y(k+n|k) \quad (\text{V-33})$$

Separando-se, como em (V-10), a parte integradora da parte estável:

$$z^i(k+n|k) = N_1 V^{-1} N x(k+n|k) \quad (\text{V-34})$$

$$z^{st}(k+n|k) = N_2 V^{-1} N x(k+n|k) \quad (\text{V-35})$$

$$\begin{aligned} N_1 & - [I_{ny} \quad 0 \quad \dots \quad 0], N_1 \in \mathbb{R}^{ny \times (na+1),ny} \\ N_2 & - [0_{na.ny \times ny} \quad I_{na.ny}], N_2 \in \mathbb{R}^{na.ny \times (na+1),ny} \\ N & - [I_{(na+1),ny} \quad 0_{(na+1),ny \times (nb-1),nu}], N \in \mathbb{R}^{(na+1),ny \times [(na+1),ny + (nb-1),nu]} \end{aligned}$$

Substituindo (V-35) em (V-32) com o objetivo de voltar à soma infinita para o estado

lido na planta:

$$S_{\infty} = \left[ N_2 V^{-1} N x(k+n|k) \right]^T P N_2 V^{-1} N x(k+n|k) \quad (\text{V-36})$$

A predição para o estado  $x$  no instante  $n$  a partir do instante atual deve levar em consideração as ações de controle aplicadas na entrada do processo e considerar a matriz original de estados. Utilizando o modelo indicado em **(IV-6)** é possível obter a expressão da predição do estado.

Para o instante 1:

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + B\Delta u(k|k) \quad (\text{V-37})$$

Para o instante 2:

$$\begin{aligned} x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + B\Delta u(k+1|k) = \\ &A \left[ Ax(k|k) + B\Delta u(k|k) \right] + B\Delta u(k+1|k) = \\ &A^2 x(k|k) + AB\Delta u(k|k) + B\Delta u(k+1|k) \end{aligned} \quad (\text{V-38})$$

Para o instante igual ao horizonte de controle  $m$ :

$$x(k+m|k) = A^m x(k|k) + A^{m-1} B\Delta u(k|k) + \dots + B\Delta u(k+m-1|k) \quad (\text{V-39})$$

Para o instante igual ao horizonte de controle  $m+1$ :

$$\begin{aligned} x(k+m+1|k) &= A^{m+1} x(k|k) + A^m B\Delta u(k|k) + \dots \\ &+ AB\Delta u(k+m-1|k) + B\Delta u(k+m|k) \end{aligned} \quad (\text{V-40})$$

Como, na equação **(V-40)**,  $\Delta u(k+m|k) = 0$ , tem-se que:

$$x(k+m+1|k) = A^{m+1} x(k|k) + A^m B\Delta u(k|k) + \dots + AB\Delta u(k+m-1|k) \quad (\text{V-41})$$

Para o instante  $n$  que corresponde ao horizonte de controle estendido:

$$x(k+n|k) = A^n x(k|k) + A^{n-1} B\Delta u(k|k) + \dots + A^{n-m} B\Delta u(k+m-1|k) \quad (\text{V-42})$$

Colocando na forma matricial, vem:

$$x(k+n|k) = A^n x(k|k) + \begin{bmatrix} A^{n-1} B & A^{n-2} B & \dots & A^{n-m} B \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (\text{V-43})$$



$$\Delta u_k \quad - \quad \left[ \Delta u(k|k)^T \quad \Delta u(k+1|k)^T \quad \cdots \quad \Delta u(k+m-1|k)^T \right]^T$$

Escrevendo em uma notação mais compacta:

$$x(k+n|k) = A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \quad (\text{V-44})$$

$$B_m \quad - \quad \left[ A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \cdots \quad A^{n-m}B \right], \quad B_m \in \mathbb{R}^{[(na+1),ny+(nb-1),nu] \times nu}$$

Substituindo (V-44) em (V-36), vem:

$$S_\infty = \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right]^T \tilde{Q} \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] \quad (\text{V-45})$$

$$\tilde{Q} \quad - \quad N^T V^{-1T} N_2^T P N_2 V^{-1} N$$

Abrindo a equação indicada em (V-45) com o objetivo de colocar esta expressão na forma padrão de programação quadrática, tem-se:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \left[ x(k|k)^T A^{nT} + \Delta u_k^T B_m^T \right] \tilde{Q} \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] = \\ S_\infty &= x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k) + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m \Delta u_k \\ &\quad + \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} A^n x(k|k) + \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} B_m \Delta u_k \end{aligned} \quad (\text{V-46})$$

$$S_\infty = \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} B_m \Delta u_k + 2x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m \Delta u_k + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k) \quad (\text{V-47})$$

Retornando à equação (V-15), pode-se utilizar a equação (III-73) para estimar a primeira parcela da soma total com o horizonte de predição de  $n$ , parcela onde as ações de controle ainda devem ser consideradas. Neste caso:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^n \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} \right] = \\ &\quad \left[ \Psi_x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi_x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-48})$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n.ny \times [(na+1).ny + (nb-1).nu]} \\
\Theta &= \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^m B & CA^{m-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \dots & CA^{n-m}B \end{bmatrix}, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (m.nu)} \\
\bar{Q} &= \begin{bmatrix} Q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (n.ny)} \\
\bar{y}^{sp} &= \begin{bmatrix} y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{(n.ny)}
\end{aligned}$$

A equação indicada em **(V-48)** representa a predição de um controlador preditivo multivariável com modelo em espaço de estados e horizonte de predição finito.

Desenvolvendo **(V-48)** da mesma forma que foi feito para a soma infinita:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[ x(k)^T \Psi^T + \Delta u_k^T \Theta^T - \bar{y}^{spT} \right] \bar{Q} \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} \right] = \\
S_1 &= x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \Psi x(k) + x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \\
&\Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Psi x(k) + \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} - \\
&\bar{y}^{spT} \bar{Q} \Psi x(k) - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \bar{y}^{sp}
\end{aligned} \tag{V-49}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k \\
&+ \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]
\end{aligned} \tag{V-50}$$

Substituindo as somas indicadas em **(V-50)** e **(V-47)** na função objetivo apresentada em **(V-14)**, vem:

$$\begin{aligned}
J_k = & \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \\
& \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} B_m \Delta u_k + 2 x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m \Delta u_k + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k \\
& + \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k)
\end{aligned} \tag{V-51}$$

$$\begin{aligned}
J_k = & \Delta u_k^T \left[ B_m^T \tilde{Q} B_m + \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} \right] \Delta u_k + \\
& 2 \left[ x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m + \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \Theta \right] \Delta u_k + \\
& \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k)
\end{aligned} \tag{V-52}$$

$$J_k = \Delta u_k^T H \Delta u_k + 2 c_f^T \Delta u_k + c \tag{V-53}$$

$$H \quad - \quad H = B_m^T \tilde{Q} B_m + \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R}$$

$$\bar{R} \quad - \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{m \cdot nu}$$

$$c_f^T \quad - \quad \left[ x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m + \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \Theta \right]$$

$$c \quad - \quad \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k)$$

#### V.4. RESTRIÇÕES DO IHMPC

A primeira restrição para o IHMPC apareceu na equação (V-24), onde foi necessário impor que os modos instáveis gerados pelo modelo fossem anulados ao longo do horizonte de controle estendido, já que neste caso não se poderia assumir que a matriz de estados no horizonte de predição infinito tendesse a zero.

$$C_y V^i z^i (k+n|k) - y^{sp} = 0 \tag{V-24}$$

Para maior facilidade, esta restrição pode ser explicitada em função do estado real lido da planta utilizando a equação (V-34), reescrita a seguir.

$$z^i (k+n|k) = N_1 V^{-1} N x(k+n|k) \tag{V-34}$$

Substituindo (V-34) na restrição (V-24):

$$C_y V^i N_1 V^{-1} N x(k+n|k) - y^{sp} = 0 \quad (\text{V-54})$$

Para o horizonte de controle estendido, a equação (V-44) mostra o valor de predição no instante atual. Substituindo (V-44) na equação (V-54):

$$C_y V^i N_1 V^{-1} N \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] - y^{sp} = 0 \quad (\text{V-55})$$

A equação (V-55) mostra a restrição que deve ser adicionada ao problema de otimização, evitando uma soma sem limites.

As outras restrições são clássicas com relação ao incremento aplicado as variáveis manipuladas e aos limites máximos e mínimos destas variáveis.

Desta forma, o IHMPC proposto para um sistema estável é a solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\Delta u_k} J_k = \Delta u_k^T H \Delta u_k + 2c_f^T \Delta u_k + c \quad (\text{V-56})$$

s.a.

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}$$

$$C_y V^i N_1 V^{-1} N \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] - y^{sp} = 0$$

O problema representado em (V-56) apresenta uma dificuldade de convergência, soluções limitadas e de grande sensibilidade a variações nos polos integradores. Ainda, se o *set point* não for alcançável, a restrição não poderia ser satisfeita, o que geraria uma inviabilidade na solução do problema de otimização.

A melhor alternativa é relaxar este problema de otimização, acrescentando uma variável de folga,  $\delta_k$ . Esta variável de folga está associada à restrição de igualdade e aos polos integradores que surgem do modelo de processo escrito na forma incremental.

## V.5. IHMPC ESTENDIDO COM MODELO DE REALINHAMENTO

Para evitar os problemas de convergência e de domínio de soluções limitadas do problema de otimização anterior, principalmente na restrição (V-55), pode-se relaxar o problema (V-56) com o uso de uma variável de folga, definida como  $\delta_k$ . Esta variável

deve modificar a função objetivo do controlador de forma a ser minimizada na busca da solução ótima para o problema e, no entanto, sem tornar o mesmo sem solução.

A função objetivo proposta está indicada na equação **(V-57)**.

$$J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k + \delta_k^T S \delta_k \quad (\text{V-57})$$

- $J_k$  - Função de custo para o instante  $k$
- $x(k+j|k)$  - Predição para o estado feita instante  $k$  para o instante  $k+j$
- $Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas,  $Q \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $S$  - Matriz para penalização das folgas,  $S \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $\delta_k$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador,  $\delta_k \in \mathbb{R}^{ny}$
- $\bar{R}$  - Matriz de supressão das variáveis manipuladas
 
$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{(m.nu) \times (m.nu)}$$
- $\Delta u_k$  - Vetor de predição para a saída feita instante  $k$  para os instantes futuros até  $m-1$ ,
 
$$\Delta u_k = \left[ \Delta u(k|k)^T \quad \Delta u(k+1|k)^T \quad \cdots \quad \Delta u(k+m-1|k)^T \right]^T$$

A soma infinita apresentada em **(V-57)** pode ser decomposta em duas parcelas: a primeira até o horizonte de controle estendido  $n$  e a segunda deste instante até infinito.

$$S = S_1 + S_{\infty} = \sum_{j=1}^n \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] \quad (\text{V-58})$$

Tratando a soma infinita indicada por  $S_{\infty}$ , vem:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ Cx(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] \quad (\text{V-59})$$

No instante considerado em **(V-59)** é válida a relação em **(V-2)** e **(V-3)**. Portanto:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y x_y(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] \quad (\text{V-60})$$

$$C \quad - \quad \begin{bmatrix} C_y & C_{\Delta u} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_y & - [I_{ny} \ 0], C_y \in \mathbb{R}^{ny \times (na+1), ny} \\ C_{\Delta u} & - [0], C_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{ny \times (nb-1), nu} \end{aligned}$$

Ainda para intervalos acima deste instante  $n$ , a matriz  $A$  passa a ser apenas composta da matriz  $A_y$  e a componente  $x_{\Delta u}$  do estado é nula. Desta forma, escrevendo a predição do estado em função do instante  $n$ , é possível escrever:

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y A_y^j x_y(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \quad (\text{V-61})$$

$$\left[ C_y A_y^j x_y(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]$$

Substituindo a equação (V-5) no componente  $A_y^j$  da equação (V-61), vem:

$$A_y^j = [VA_d V^{-1}]^j = [VA_d V^{-1}][VA_d V^{-1}] \dots [VA_d V^{-1}] = VA_d^j V^{-1} \quad (\text{V-62})$$

Lembrando da definição definida em (V-6) para a matriz diagonal, vem:

$$A_y^j = VA_d^j V^{-1} = V \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st} \end{bmatrix}^j V^{-1} = V \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st j} \end{bmatrix} V^{-1} \quad (\text{V-63})$$

Substituindo (V-63) na equação (V-61):

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st j} \end{bmatrix} V^{-1} x_y(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \quad (\text{V-64})$$

$$\left[ C_y V \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st j} \end{bmatrix} V^{-1} x_y(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]$$

Mudando o espaço vetorial para o estado transformado  $z$ , onde é possível a separação dos polos integradores do modelo dos polos estáveis do processo, através da transformação indicada em (V-4) e (V-10):

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n|k) \\ z^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \quad (\text{V-65})$$

$$\left[ C_y \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n|k) \\ z^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k \right]$$

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V^i z^i(k+n|k) + C_y V^{st} F^{stj} z^{st}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \quad (\text{V-66})$$

$$\left[ C_y V^i z^i(k+n|k) + C_y V^{st} F^{stj} z^{st}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k \right]$$

Para que (V-66) seja limitado, deve-se impor a seguinte condição:

$$C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad (\text{V-67})$$

Substituindo (V-34) na equação (V-67):

$$C_y V^i N_1 V^{-1} N x(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad (\text{V-68})$$

O valor previsto para o estado real da planta no horizonte de controle estendido é dado pela equação (V-44). Logo:

$$C_y V^i N_1 V^{-1} N \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad (\text{V-69})$$

A equação (V-69) representa a primeira restrição para o IHMPC relaxado.

Uma vez satisfeita à restrição (V-69), a soma indicada em (V-66) passa a ser limitada em:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V^{st} F^{stj} z^{st}(k+n|k) \right]^T Q \left[ C_y V^{st} F^{stj} z^{st}(k+n|k) \right] \quad (\text{V-70})$$

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} z^{st}(k+n|k)^T F^{stjT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} F^{stj} z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-71})$$

$$S_{\infty} = z^{st}(k+n|k)^T \left[ \sum_{j=1}^{\infty} F^{stjT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} F^{stj} \right] z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-72})$$

Da mesma forma que indicado nas equações (V-29), (V-30) e (V-31), é possível verificar que:

$$S_{\infty} = z^{st}(k+n|k)^T P z^{st}(k+n|k) \quad (\text{V-32})$$

$$P = F^{stT} P F^{st} + F^{stT} V^{stT} C_y^T Q C_y V^{st} F^{st}$$

Utilizando a equação (V-35) em (V-32):

$$S_{\infty} = \left[ N_2 V^{-1} N x(k+n|k) \right]^T P N_2 V^{-1} N x(k+n|k) \quad (\text{V-73})$$

$$S_{\infty} = x(k+n|k)^T \tilde{Q} x(k+n|k) \quad (\text{V-74})$$

$$\tilde{Q} \quad - \quad N^T V^{-1T} N_2^T P N_2 V^{-1} N$$

Substituindo (V-44) em (V-74), vem:

$$S_{\infty} = \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right]^T \tilde{Q} \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] \quad (\text{V-75})$$

$$B_m \quad - \quad \left[ A^{n-1} B \quad A^{n-2} B \quad \dots \quad A^{n-m} B \right]$$

Abrindo a equação indicada em (V-75) com o objetivo de colocar esta expressão na forma padrão da programação quadrática, tem-se:

$$\begin{aligned} S_{\infty} &= \left[ x(k|k)^T A^{nT} + \Delta u_k^T B_m^T \right] \tilde{Q} \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] = \\ S_{\infty} &= x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k) + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m \Delta u_k \\ &\quad + \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} A^n x(k|k) + \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} B_m \Delta u_k \end{aligned} \quad (\text{V-76})$$

$$S_{\infty} = \Delta u_k^T B_m^T \tilde{Q} B_m \Delta u_k + 2x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} B_m \Delta u_k + x(k|k)^T A^{nT} \tilde{Q} A^n x(k|k) \quad (\text{V-77})$$

Retornando a equação (V-58), pode-se utilizar a equação (III-73) para estimar a primeira parcela da soma total,  $S_1$ , com o horizonte de predição  $n$ . Nesta parcela as ações de controle ainda devem ser consideradas.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^n \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k \right] = \\ &\quad \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k \right] \end{aligned} \quad (\text{V-78})$$

$$\Psi \quad - \quad \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n.ny \times [(na+1).ny + (nb-1).nu]}$$



$$\begin{aligned}
\Theta &= \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \cdots & CB \\ CA^m B & CA^{m-1}B & \cdots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \cdots & CA^{n-m}B \end{bmatrix}, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (m.nu)} \\
\bar{Q} &= \begin{bmatrix} Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (n.ny)} \\
\bar{I}_{ny} &= \begin{bmatrix} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times ny} \\
\bar{y}^{sp} &= \begin{bmatrix} y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{(n.ny)}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo **(V-78)** da mesma forma que foi feito para a soma infinita:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left[ x(k)^T \Psi^T + \Delta u_k^T \Theta^T - \bar{y}^{spT} - \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \right] \bar{Q} \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k \right] = \\
& x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \Psi x(k) + x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} - x(k)^T \Psi^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
& \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Psi x(k) + \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} - \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
& - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \Psi x(k) - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
& - \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Psi x(k) - \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{y}^{sp} + \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k
\end{aligned} \tag{V-79}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k - \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
& 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
& + \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]
\end{aligned} \tag{V-80}$$

Considerando as somas explicitadas em **(V-80)** e **(V-77)**, e substituindo na função objetivo apresentada em **(V-57)**, vem:

$$\begin{aligned}
J_k &= S_1 + S_\infty + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k + \delta_k^T S \delta_k = \\
J_k &= \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k + \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k - \delta_k^T \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - \Delta u_k^T \Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
&+ 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k - 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k \\
&+ \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] \\
&+ \Delta u_k^T B_m^T \bar{Q} B_m \Delta u_k + 2x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} B_m \Delta u_k + x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} A^n x(k|k) \\
&+ \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k + \delta_k^T S \delta_k
\end{aligned} \tag{V-81}$$

Escrevendo a função objetivo expressa em (V-81) na forma matricial, vem:

$$\begin{aligned}
J_k &= \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m^T \bar{Q} B_m + \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny} \bar{Q} \Theta^T & \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} + \\
&2 \begin{bmatrix} x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} B_m + \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta & -\left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} \\
&+ x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} A^n x(k|k) + \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]
\end{aligned} \tag{V-82}$$

Desta forma, a função objetivo para o IHMPC relaxado e com aplicação em um sistema estável e caso nominal fica:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} + c \tag{V-83}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
-\Delta u_{\max} &\leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max} \\
u_{\min} &\leq u(k+j|k) \leq u_{\max} \\
C_y V^i N_1 V^{-1} N \left[ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \right] - y^{sp} - \delta_k &= 0 \tag{V-69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &- \begin{bmatrix} B_m^T \bar{Q} B_m + \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny} \bar{Q} \Theta^T & \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S \end{bmatrix} \\
\bar{R} &- \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{(m.nu) \times (m.nu)} \\
c_f^T &- \begin{bmatrix} x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} B_m + \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \\ -\left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c & - \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] + x(k|k)^T A^{nT} \bar{Q} A^n x(k|k) \\
B_m & - \left[ A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \dots \quad A^{n-m}B \right]
\end{aligned}$$

Pode-se observar a presença de um termo constante na função objetivo indicada em **(V-83)**. Embora isso não seja usual, a justificativa para tal inclusão será mais bem compreendida quando for apresentado o problema robusto, que considera modelos diferentes para a mesma planta de processo. Neste caso, será acrescentada uma restrição no problema de otimização que garanta a contração da função objetivo dos diversos modelos considerados. E, para essa contração ficar garantida, o termo constante deve ser considerado no cálculo do valor da função de custo.

## V.6. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS E PARA O CASO NOMINAL

Seja  $\left[ \Delta u^*(k|k) \quad \Delta u^*(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1|k) \right]$  e  $\delta_k^*$  a solução ótima no instante  $k$  do problema indicado em **(V-57)** e  $J_k^*$  o valor ótimo de  $J_k$ . Desta forma, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
J_k^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\
\sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S \delta_k^*
\end{aligned} \tag{V-84}$$

$$\begin{aligned}
J_k^* = \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\
\sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\
\Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S \delta_k^*
\end{aligned} \tag{V-85}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\
& \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) = \\
& J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \\
& - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S \delta_k^*
\end{aligned} \tag{V-86}$$

Se  $\Delta u_k^*$  e  $\delta_k^*$  forem aplicados ao sistema **(IV-21)** e não houver nenhum distúrbio, então, no instante  $k+1$  seguinte, pode-se afirmar que a sequência  $\tilde{\Delta u}_{k+1}$  igual a  $[\Delta u^*(k+1|k) \ \cdots \ \Delta u^*(k+m-1|k) \ 0]$  e  $\delta_k^*$  será uma solução viável para o problema **(V-57)**, pois satisfaz a restrição indicada em **(V-69)**.

Para demonstrar isso, pode-se retornar à restrição **(V-69)** para o estado transformado  $z$ , que foi indicada na equação **(V-67)**, a seguir transcrita.

$$C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \tag{V-67}$$

No instante  $k$ , esta restrição é satisfeita e, portanto, é correto afirmar que:

$$C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{V-87}$$

A solução proposta para o instante  $k+1$  deve também satisfazer essa restrição **(V-67)**.

$$C_y V^i z^i(k+1+n|k+1) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{V-88}$$

Supondo não haver perturbações, pode-se afirmar que:

$$z(k+1+n|k+1) = z(k+n+2|k) \tag{V-89}$$

A predição de estados no espaço modificado  $z$  foi vista em **(V-11)**:

$$\begin{bmatrix} z^i(k+n+1|k) \\ z^{st}(k+n+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n|k) \\ z^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} \tag{V-90}$$

A equação **(V-90)** permite concluir que:

$$z^i(k+n+2|k) = z^i(k+n+1|k) = z^i(k+n|k) \tag{V-91}$$

$$z^{st}(k+n+1|k) = F^{st} z^{st}(k+n|k) \tag{V-92}$$

Substituindo **(V-91)** e **(V-89)** em **(V-88)** chega-se na equação **(V-87)**, que é verdadeira. Portanto, a solução proposta é viável.

Para esta sequência de controle e lembrando que, apenas para fins de demonstração será considerada a existência de um termo infinito deslocado de um, o valor de  $J_{k+1}$  será:

$$J_{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S \delta_k^* \quad (\text{V-93})$$

A *e-mésima* ação de controle já é considerada nula, conforme a solução proposta e viável  $\tilde{\Delta u}_{k+1}$ , e, portanto, não aparece na equação **(V-93)**,

Substituindo **(V-86)** em **(V-93)**:

$$J_{k+1} = J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S \delta_k^* + \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \delta_k^{*T} S \delta_k^* \quad (\text{V-94})$$

$$J_{k+1} = J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) + \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \quad (\text{V-95})$$

Na equação indicada em **(V-95)**, o último termo é nulo, conforme demonstração a seguir.

$$\left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] = \left[ C_{y,x_y}(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_{y,x_y}(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \quad (\text{V-96})$$

$$x_y(k+\infty+1|k) = Vz(k+\infty+1|k) = VA_d^{\infty+1} z(k+n|k) \\ x_y(k+\infty+1|k) = \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st^{\infty+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(k+n|k) \\ z^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} \quad (\text{V-97}) \\ x_y(k+\infty+1|k) = V^i z^i(k+n|k) + V^{st} F^{st^{\infty+1}} z^{st}(k+n|k)$$

Mas para os polos estáveis, tem-se que  $F^{st^{\infty+1}} = 0$ .

$$\begin{aligned} & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] = \\ & \left[ C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_y V^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \end{aligned} \quad (\text{V-98})$$

No entanto, a restrição satisfeita indicada em **(V-87)** garante que a equação **(V-98)** é nula. Desta forma, **(V-95)** se resume a:

$$\begin{aligned} J_{k+1} = J_k^* - & \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \\ & \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) \end{aligned} \quad (\text{V-99})$$

Como  $Q$  e  $R$  são positivos, pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} \leq J_k^* \quad (\text{V-100})$$

A solução ótima para o problema **(V-57)** será menor ou igual à solução viável. Portanto:

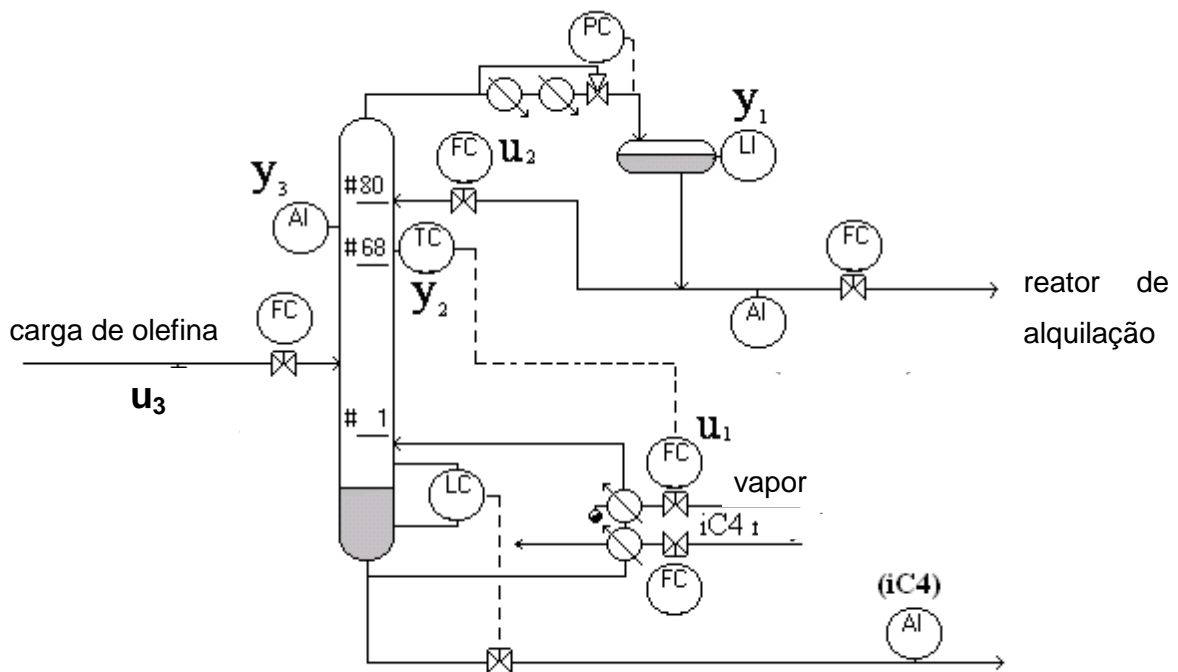
$$J_{k+1}^* \leq J_{k+1} \leq J_k^* \quad (\text{V-101})$$

A relação indicada em **(V-101)** mostra que a função objetivo  $J_k$  é uma função decrescente e o sistema **(IV-21)** é assintoticamente estável, segundo Lyapunov.

## V.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Foi feito um estudo da aplicação dos controladores obtidos a partir do modelo de um processo que corresponde a uma coluna de separação de isobutano de uma unidade de produção de gasolina de aviação. Nesta coluna de preparação de carga para a unidade ocorre a separação do isobutano e uma mistura de butenos que são enviados a um reator de alquilação. A Figura V-1 mostra o fluxograma básico referente a este processo.

A variável controlada pelo MPC foi a temperatura no prato de número 68 ( $y_2$ , °C). As variáveis manipuladas foram a vazão de vapor para o refeedor ( $u_1$ , ton/h), a vazão de refluxo de topo ( $u_2$ , m<sup>3</sup>/dia) e o desvio de temperatura de carga em relação ao estado estacionário ( $u_3$ , °C).



**Figura V-1– Coluna de separação de isobutano**

Utilizando esta coluna e controlando apenas a variável estável, que é a temperatura, e separando, portanto, o modelo desta parte estável do processo, tem-se a seguinte função de transferência:

$$y_2(s) = \frac{4,7e^{-7s}}{9,3s+1}u_1(s) + \frac{1,4 \times 10^{-3}e^{-2s}}{6,8s+1}u_2(s) + \frac{0,4e^{-3s}}{11,6s+1}u_3(s) \quad (\text{V-102})$$

Foi utilizado um período de amostragem de T igual a uma unidade de tempo para a conversão dos modelos na forma digital.

A Tabela V-1 mostra os demais parâmetros que foram adotados para o controlador. A sintonia para o controlador foi obtida de forma heurística, não obedecendo a nenhuma metodologia.

A Figura V-2 mostra a resposta apresentada pela saída do processo em malha fechada com o controlador proposto neste capítulo para uma variação no set point que aconteceu no instante  $k = 10$ , enquanto que a Figura V-3 mostra o comportamento das entradas e a Figura V-4 mostra o valor da função objetivo do controlador durante a

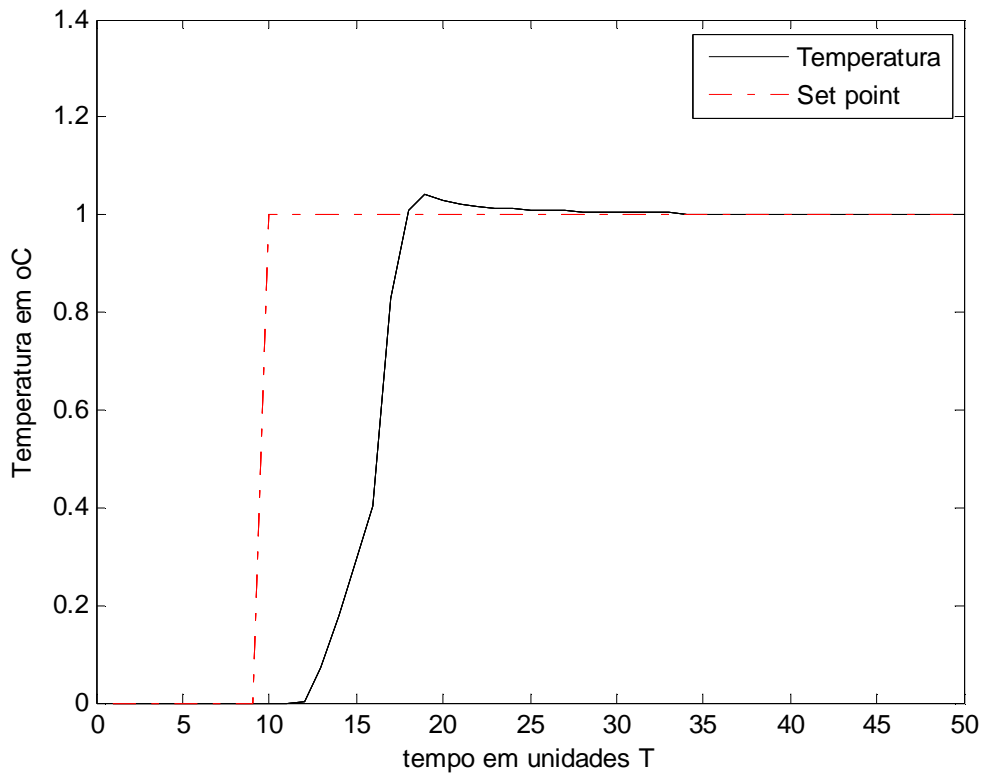
simulação.

Nestas figuras, pode-se notar o comportamento assintoticamente estável da função de custo e que o valor desejado para a variável controlada foi atingido sem *offset* e com suavidade nas variáveis manipuladas.

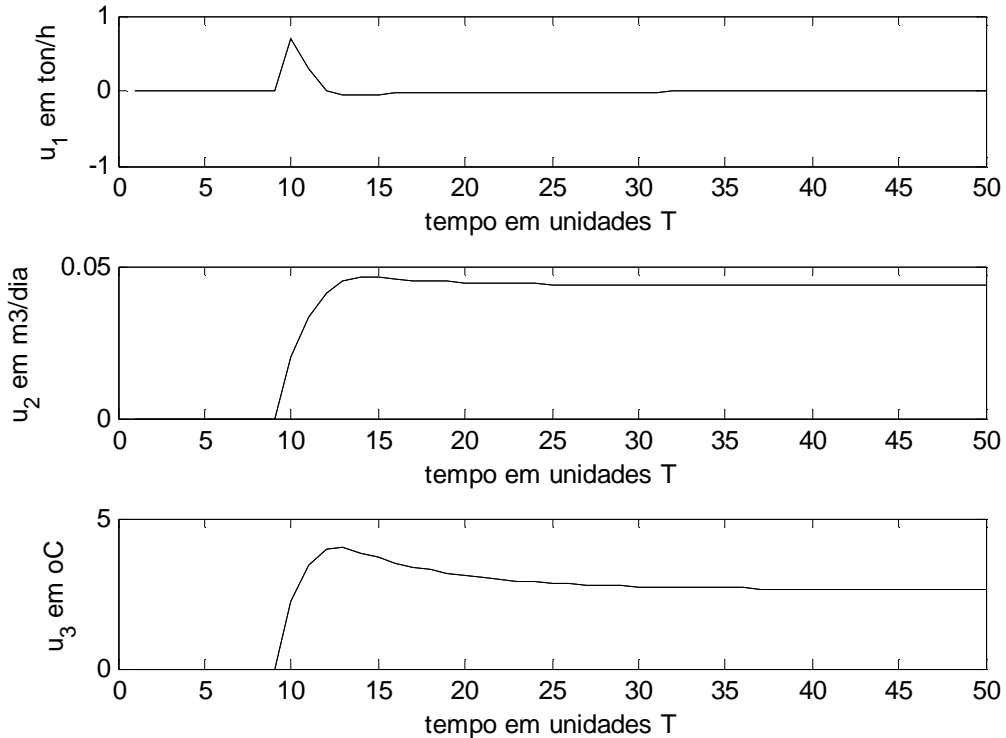
**Tabela V-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo estável**

Descrição	Simbologia	Valor
Horizonte de controle	$m$	3
Horizonte de controle estendido	$n$	5
Peso das variáveis controladas	$Q$	1
Fator de supressão	$R$	[0,1 0,1 0,1]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S^i$	[1000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[100 100 100]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-100 -100 -100]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[10,2 10,2 10,2]

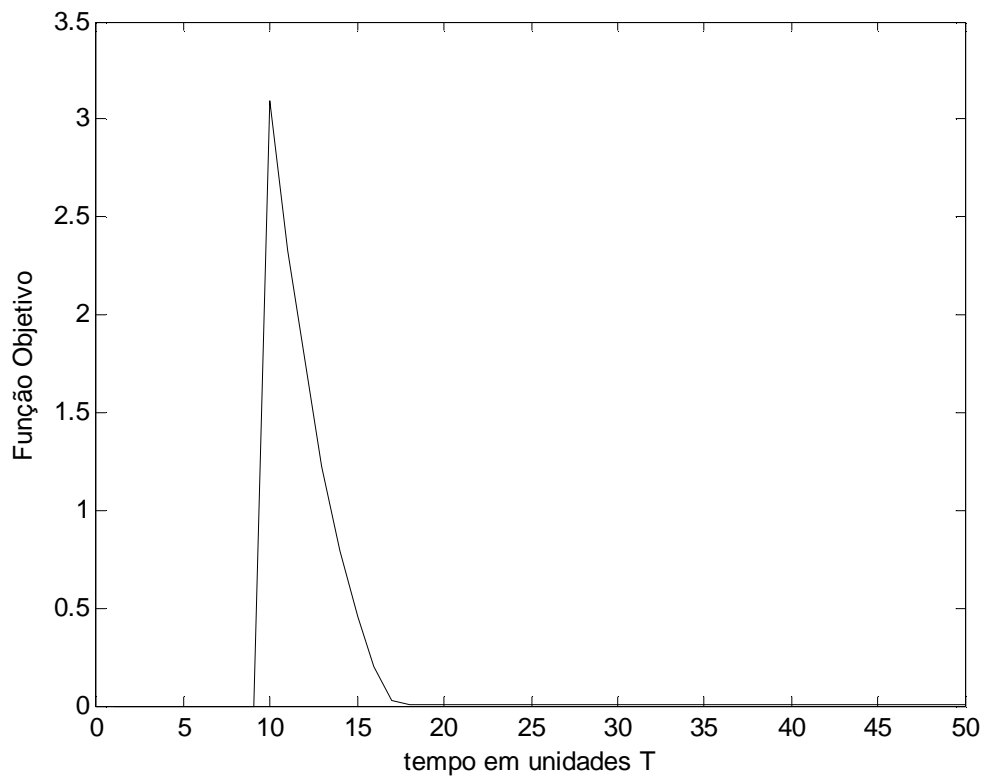




**Figura V-2– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável**



**Figura V-3– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável**



**Figura V-4– Comportamento da função objetivo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta estável**

## **VI. IHMPC ROBUSTO COM FEEDBACK DE SAÍDA APLICADO APENAS A PROCESSOS COM POLOS ESTÁVEIS E INCERTEZA DE MODELO**

---

### **VI.1. INTRODUÇÃO**

Uma característica de uma unidade industrial é a possibilidade de mudança de seus modelos ao longo do seu período de campanha. Um exemplo típico seria a desativação de um catalisador que ocorre em um reator durante o tempo de operação do mesmo. Outra possibilidade de alteração de modelo ocorre quando é linearizado um dado sistema com característica não linear em torno de um ponto operacional. Caso o processo tenha que operar em um ponto diferente deste, o modelo obtido pode não ser mais válido.

Estas alterações de modelo podem tornar instável a malha fechada do processo com o controlador nominal, o que pode gerar a necessidade do operador desligar algumas variáveis da ação do controle preditivo. Portanto, a robustez de um controlador, quanto à estabilidade referente a variações que possam ocorrer no modelo considerado pelo controlador e o modelo real do processo, torna-se uma característica de grande interesse para as aplicações industriais. Este capítulo apresentará uma proposta de controlador preditivo robusto com horizonte de predição infinito baseado no estado não mínimo definido no capítulo IV.

A existência de um controlador robusto quanto à estabilidade ainda é uma deficiência para os controladores preditivos oferecidos no mercado (QIN e BADGWELL, 2003). Um controlador robusto deve apresentar estabilidade em malha fechada para certa incerteza do modelo real de processo. Como uma grande parte dos sistemas de processo possui uma característica não linear e podem operar em pontos distintos, conforme necessidade da operação, modelos lineares distintos podem ser utilizados para representar esses sistemas dentro da janela operacional em que o mesmo opera.

O projeto do controlador do capítulo V considerou apenas o modelo nominal, onde o modelo utilizado pelo controlador coincidiria com a planta real, e nenhuma abordagem foi desenvolvida para o caso de incerteza do modelo com relação a essa planta. No entanto, como incerteza é uma constante na prática, a estabilidade deste controlador não é garantida nos processos reais. Este assunto tem sido extensivamente estudado

na literatura de controle para o caso do sistema ser representado por um estado de ordem mínima. Dentre estes trabalhos, pode-se destacar GONZÁLEZ, ODLOAK e MARCHETTI (2007), MHASKAR (2006), KOTHARE *et al.* (2002), KOTHARE *et al.* (1996) e LEE e YU (1997).

Todos estes desenvolvimentos assumiram que o estado é conhecido. No entanto, na prática, o modelo em espaço de estado é levantado baseado em dados experimentais, que podem levar a uma incerteza, e estes estados, normalmente, não são medidos. Para estimar o conjunto de estados utilizado pelo controlador é necessária a inclusão de um observador de estados. Para o estudo da estabilidade da malha fechada, deve-se levar em consideração este observador, conforme visto no item III.2.4. Como já visto, o princípio da separação garante que um controlador linear estável, associado a um observador estável, estabiliza a malha de controle fechada. No entanto, quando as restrições de um controlador se tornam ativas, o MPC se torna não linear e este princípio não pode ser utilizado.

Uma alternativa para resolver este problema seria o uso de um conceito de estado mensurável. O modelo exposto no capítulo IV deste trabalho será, portanto, utilizado no desenvolvimento deste controlador robusto.

Com uma estrutura de modelo apresentada no capítulo IV, será considerado que a incerteza de modelo estará associada à incerteza das matrizes de estado e de entrada,  $A$  e  $B$ . Uma forma usual de se representar esta incerteza de modelo é considerar um conjunto discreto e finito de modelos que possam representar o sistema para diversas condições operacionais. Este conjunto de modelos será tratado como  $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L\}$ , onde cada  $\theta_i$  corresponde a um conjunto particular de parâmetros que definem o modelo  $i$ . Pode-se considerar que este conjunto de modelos corresponde a diversos pontos de operação distintos da unidade e cada modelo representa uma aproximação linear em torno do ponto de operação de um processo real não linear. Ou, então, cada modelo representa um sistema em que algum parâmetro muda com o tempo, tais como a reatividade de um reator ao longo do tempo de campanha da unidade. Em ambos os casos, a representação da incerteza do modelo é definida como incerteza multimodelo (BADGWELL, 1997). Alguns autores, tais como KOTHARE *et al.* (1996), LU e ARKUN (2000) e XIA *et al.* (2008), estendem este conceito assumindo que estes modelos constituem os vértices de um politopo que caracteriza o espaço vetorial de incerteza do modelo de processo. Todas as combinações lineares destes vértices constituem uma possibilidade para o modelo real da planta.

$$\theta = \sum_{i=1}^L \alpha_i \theta_i, \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (\text{VI-1})$$

Desta forma, cada incerteza multimodelo pode ser representada por um modelo em espaço de estados representado por:

$$\left[ A(\theta_p), B(\theta_p) \right], \quad p = 1 \dots L \quad (\text{VI-2})$$

Para cada modelo  $\theta_p$ , é possível realizar uma decomposição de Jordan, conforme foi indicado em **(V-4)**. Portanto:

$$A_y(\theta_p)V(\theta_p) = V(\theta_p)A_d(\theta_p) \quad (\text{VI-3})$$

$A_y(\theta_p)$  - Matriz de estado associada às saídas do processo

$$A_y(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1),ny] \times [(na+1),ny]}$$

$V(\theta_p)$  - Matriz de autovetores da matriz  $A_y(\theta_p)$ ,

$$V(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1),ny] \times [(na+1),ny]}$$

$A_d(\theta_p)$  - Matriz diagonal com os autovalores da matriz  $A_y(\theta_p)$ ,

$$A_d(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1),ny] \times [(na+1),ny]}$$

Na equação **(VI-3)**,  $A_d(\theta_p)$  mostra os autovalores integradores do modelo incremental e os autovalores estáveis para cada modelo levantado para o processo, conforme indicado em **(VI-4)**.

$$A_d(\theta_p) = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (\text{VI-4})$$

No instante do horizonte de controle estendido  $n$ , a transformação de estados passa a ser possível e, similar a equação **(V-10)**, pode-se escrever:

$$x_y(\theta_p) = V(\theta_p)z(\theta_p) \quad (\text{VI-5})$$

Neste novo estado  $z$ , é possível a separação dos estados integradores devidos ao modelo na forma incremental e a separação dos estados estáveis do processo.

$$x_y(\theta_p) = \begin{bmatrix} V^i(\theta_p) & V^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^i(\theta_p) \\ z^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \quad (\text{VI-6})$$

A transformação é biunívoca. Logo:

$$z(\theta_p) = V^{-1}(\theta_p) x_y(\theta_p) \quad (\text{VI-7})$$

$$\begin{bmatrix} z^i(\theta_p) \\ z^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in}^i(\theta_p) \\ V_{in}^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} x_y(\theta_p), \quad p = 1 \dots L \quad (\text{VI-8})$$

Analogamente ao caso nominal, conforme equação (V-11), é possível fazer a predição do estado  $z$  conforme equação (VI-9).

$$z_{\theta_p}(k+n+j|k) = A_d(\theta_p)^j z_{\theta_p}(k+n|k) \quad (\text{VI-9})$$

Substituindo (VI-4) em (VI-9):

$$z_{\theta_p}(k+n+j|k) = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}(\theta_p) \end{bmatrix}^j z_{\theta_p}(k+n|k) \quad (\text{VI-10})$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n+j|k) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n+j|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}^j(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n|k) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} \quad (\text{VI-11})$$

Existem diversas abordagens na literatura de controle para desenvolver um controlador que seja robusto à incerteza de modelo. KOTHARE, *et al.* (1996) propuseram utilizar inequações de matrizes lineares (LMI) para encontrar uma função de Lyapunov  $x^T Q x$  e uma lei de controle que minimize a um batente máximo as funções de custo para cada vértice do politopo que define a incerteza do modelo. BADGWELL (1997) propôs um controlador robusto para o problema regulador incluindo uma restrição de contração da função custo levantada para cada modelo que constitui o conjunto  $\Omega$  da incerteza multimodelo. A abordagem foi estendida para o problema servo para sistemas estáveis e integradores por RODRIGUES e ODLOAK (2003b) e ODLOAK (2004), considerando um modelo em espaço de estado mínimo e na forma incremental.

O controlador robusto proposto neste trabalho utilizará as restrições adicionais propostas por BADGWELL, uma para cada modelo levantado, ao problema de otimização.

## VI.2. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC ROBUSTO

A função objetivo do controlador robusto será equivalente à função objetivo apresentada na equação (V-57) do capítulo V deste trabalho. Reescrevendo esta equação para a incerteza de modelo, vem a equação (VI-12).

$$J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_{\theta_p}(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \left[ Cx_{\theta_p}(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right] \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k) R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T(\theta_p) S \delta_k(\theta_p) \quad (\text{VI-12})$$

Separando as somas em (VI-12):

$$J_k = \sum_{j=1}^n \left[ Cx_{\theta_p}(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \left[ Cx_{\theta_p}(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right] \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_{\theta_p}(k+j+n|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \left[ Cx_{\theta_p}(k+j+n|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right] \quad (\text{VI-13}) \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k) R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T(\theta_p) S \delta_k(\theta_p)$$

$$J_k = S_1 + S_{\infty} + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k) R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T(\theta_p) S \delta_k(\theta_p) \quad (\text{VI-14})$$

$$S_1 = \sum_{j=1}^n \left[ Cx_{\theta_p}(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right] \\ S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_{\theta_p}(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \left[ Cx(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]$$

A soma indicada em  $S_1$  pode ser calculada pela expressão indicada em (V-78) adaptada para o caso multimodelo.

$$S_1 = \left[ \Psi(\theta_p) x(k) + \Theta(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k(\theta_p) \right]^T \bar{Q} \\ \left[ \Psi(\theta_p) x(k) + \Theta(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k(\theta_p) \right] \quad (\text{VI-15})$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\theta_p) &- \begin{bmatrix} CA(\theta_p) \\ CA^2(\theta_p) \\ \vdots \\ CA^m(\theta_p) \\ CA^{m+1}(\theta_p) \\ \vdots \\ CA^n(\theta_p) \end{bmatrix}, \quad \Psi(\theta_p) \in \mathbb{R}^{n.ny \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]} \\
\Theta(\theta_p) &- \begin{bmatrix} CB(\theta_p) & 0 & \cdots & 0 \\ CA(\theta_p)B(\theta_p) & CB(\theta_p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}(\theta_p)B(\theta_p) & CA^{m-2}(\theta_p)B(\theta_p) & \cdots & CB(\theta_p) \\ CA^m(\theta_p)B(\theta_p) & CA^{m-1}(\theta_p)B(\theta_p) & \cdots & CA(\theta_p)B(\theta_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}(\theta_p)B(\theta_p) & CA^{n-2}(\theta_p)B(\theta_p) & \cdots & CA^{n-m}(\theta_p)B(\theta_p) \end{bmatrix}, \\
&\Theta(\theta_p) \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (m.nu)} \\
\bar{Q} &- \begin{bmatrix} Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (n.ny)} \\
\bar{I}_{ny} &- \begin{bmatrix} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times ny} \\
\bar{y}^{sp} &- \begin{bmatrix} y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times ny}
\end{aligned}$$

Quanto à soma  $S_\infty$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y x_{y(\theta_p)}(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \\
\left[ C_y x_{y(\theta_p)}(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]
\end{aligned} \tag{VI-16}$$

Aplicando a transformação de estados e utilizando a equação de predição indicada em (VI-11):



$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V(\theta_p) \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}^j(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \quad (\text{VI-17})$$

$$\left[ C_y V(\theta_p) \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}^j(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]$$

Realizando a multiplicação matricial e aplicando a separação dos autovetores como indicado em (V-9), vem:

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y \begin{bmatrix} V^i(\theta_p) & V^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n) \\ F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T Q \quad (\text{VI-18})$$

$$\left[ C_y \begin{bmatrix} V^i(\theta_p) & V^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n) \\ F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]$$

$$S_{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n) + C_y V^{st}(\theta_p) F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]^T \quad (\text{VI-19})$$

$$\left[ C_y V^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n) + C_y V^{st}(\theta_p) F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) \right]$$

Impondo a condição (VI-20), para cada modelo disponível, de modo que a soma indicada em (VI-19) tenha um valor limitado:

$$C_y V^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) = 0, \quad p = 1, \dots, L \quad (\text{VI-20})$$

Utilizando a equação indicada em (V-34), reescrita para o caso multimodelo,

$$z_{\theta_p}^i(k+n|k) = N_1 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n|k) \quad (\text{VI-21})$$

e transformando a restrição (VI-20) no estado medido:

$$C_y V^i(\theta_p) N_1 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) = 0, \quad p = 1, \dots, L \quad (\text{VI-22})$$

Escrevendo restrição (VI-22) em função do instante atual, através da equação (V-44), escrita para o caso da incerteza de modelo, vem:

$$x_{\theta_p}(k+n|k) = A^n(\theta_p) x(k|k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \quad (\text{VI-23})$$

$$B_m(\theta_p) \quad - \quad \left[ A^{n-1}(\theta_p) B(\theta_p) \quad A^{n-2}(\theta_p) B(\theta_p) \quad \dots \quad A^{n-m}(\theta_p) B(\theta_p) \right]$$

$$\Delta u_k \quad - \quad \left[ \Delta u(k|k)^T \quad \Delta u(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u(k+m-1|k)^T \right]^T$$

Substituindo **(VI-23)** em **(VI-22)**:

$$C_y V^i(\theta_p) N_1 V^{-1}(\theta_p) N \left[ A^n(\theta_p) x(k|k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \right] - y^{sp} - \delta_k(\theta_p) = 0, \quad (VI-24)$$

$$p = 1, \dots, L$$

Uma vez satisfeita à restrição **(VI-24)**, a soma **(VI-19)** fica:

$$S_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_y V^{st}(\theta_p) F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) \right]^T Q \left[ C_y V^{st}(\theta_p) F_{st}^j(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) \right] \quad (VI-25)$$

$$S_\infty = z_{\theta_p}^{st}(k+n)^T \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ F_{st}^j(\theta_p)^T \right] V^{st}(\theta_p)^T C_y^T Q C_y V^{st}(\theta_p) \left[ F_{st}^j(\theta_p) \right] \right\} z_{\theta_p}^{st}(k+n) \quad (VI-26)$$

Definindo:

$$P(\theta_p) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ F_{st}^j(\theta_p)^T \right] V^{st}(\theta_p)^T C_y^T Q C_y V^{st}(\theta_p) \left[ F_{st}^j(\theta_p) \right] \quad (VI-27)$$

Multiplicando **(VI-27)** por  $\left[ F^{st}(\theta_p) \right]^T \left[ \right] \left[ F^{st}(\theta_p) \right]$ :

$$\left[ F^{st}(\theta_p) \right]^T P(\theta_p) \left[ F^{st}(\theta_p) \right] = \sum_{j=2}^{\infty+1} \left[ F^{st}(\theta_p) \right]^j V^{stT}(\theta_p) C_y^T Q C_y V^{st}(\theta_p) \left[ F^{st}(\theta_p) \right]^j \quad (VI-28)$$

Subtraindo de **(VI-28)**:

$$P(\theta_p) - \left[ F^{st}(\theta_p) \right]^T P(\theta_p) \left[ F^{st}(\theta_p) \right] = \left[ F^{st}(\theta_p) \right]^T V^{stT}(\theta_p) C_y^T Q C_y V^{st}(\theta_p) \left[ F^{st}(\theta_p) \right] \quad (VI-29)$$

Desta forma, a equação **(VI-26)** pode ser expressa como:

$$S_\infty = z_{\theta_p}^{st}(k+n)^T P(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n) \quad (VI-30)$$

Retornando a equação **(VI-30)** para o estado original através da equação **(V-35)**, reescrita para o caso multimodelo conforme indicado em **(VI-31)**, vem:

$$z_{\theta_p}^{st}(k+n|k) = N_2 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n|k) \quad (VI-31)$$

$$S_\infty = \left[ N_2 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n) \right]^T P(\theta_p) N_2 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n) \quad (VI-32)$$

Desenvolvendo **(VI-32)**:

$$S_{\infty} = x_{\theta_p}^T(k+n) N^T V^{-1T}(\theta_p) N_2^T P(\theta_p) N_2 V^{-1}(\theta_p) N x_{\theta_p}(k+n) \quad (\text{VI-33})$$

Lembrando que a predição para o instante  $n$  é dada pela equação (V-44) escrita para o caso multimodelo, vem:

$$S_{\infty} = \left[ A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \right]^T \tilde{Q}(\theta_p) \left[ A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \right] \quad (\text{VI-34})$$

$$\tilde{Q}(\theta_p) = N^T V^{-1T}(\theta_p) N_2^T P(\theta_p) N_2 V^{-1}(\theta_p) N$$

Desenvolvendo (VI-34):

$$S_{\infty} = \left[ x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T + \Delta u_k^T B_m(\theta_p)^T \right] \tilde{Q}(\theta_p) \left[ A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \right] \quad (\text{VI-35})$$

$$S_{\infty} = x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k \quad (\text{VI-36})$$

$$+ \Delta u_k^T B_m(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \Delta u_k^T B_m(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k$$

$$S_{\infty} = \Delta u_k^T B_m(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k + 2x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k + x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) \quad (\text{VI-37})$$

Dessa forma, a função objetivo (VI-14) escrita para o caso de incerteza de modelo fica:

$$J_k = \left[ \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \Theta(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k(\theta_p) \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \Theta(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k(\theta_p) \right] + \Delta u_k^T B_m(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k + 2x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \Delta u_k + x_{\theta_p}(k)^T A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k) R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T(\theta_p) S \delta_k(\theta_p) \quad (\text{VI-38})$$

Desenvolvendo (VI-38) e colocando na forma matricial, vem:

$$J_k = \left[ \Delta u_k^T \quad \delta_k^T(\theta_p) \right] H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta_p) \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta_p) \end{bmatrix} + c \quad (\text{VI-39})$$

$$H = \begin{bmatrix} B_m(\theta_p)^T \tilde{Q} B_m(\theta_p) + \Theta(\theta_p)^T \bar{Q} \Theta(\theta_p) + \bar{R} & -\Theta(\theta_p)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta(\theta_p) & \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_f^T & - \begin{bmatrix} x_{\theta_p}^T(k) A^n(\theta_p)^T \tilde{Q} B_m(\theta_p) + \left( \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \Theta(\theta_p) \\ - \left( \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix} \\
c & - \begin{bmatrix} x_{\theta_p}^T(k) A^n(\theta_p)^T \tilde{Q} A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \left[ \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \\ \left[ \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) - \bar{y}^{sp} \right] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para garantir a contração de estados no controlador resultante da solução de **(VI-39)**, inclui-se uma restrição adicional, conforme BADGWELL (1997), que garante a contração da função objetivo para cada modelo considerado, ao invés de otimizar todas as funções objetivo que podem ser obtidas com cada modelo previsto. Para isso, ao problema de otimização no instante  $k+1$  inclui-se a solução viável,  $\tilde{\Delta u}_k$ , que vem a ser a própria solução ótima calculada para as entradas manipuladas no instante  $k$  anterior e deslocada de uma ação de controle, onde a última ação de controle seria nula, pois já teria sido atingido os valores desejados para cada variável controlada. Isto pode ser visto na equação **(VI-40)**. As folgas são calculadas a partir da restrição **(VI-24)**, aqui definido como  $\tilde{\delta}_k(\theta_p)$  e indicado na equação **(VI-41)**.

$$\tilde{\Delta u}_k = \begin{bmatrix} \Delta u^*(k+1|k) & \Delta u^*(k+2|k) & \cdots & \Delta u^*(k+m-1|k) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(VI-40)}$$

$$\tilde{\delta}_k(\theta_p) = C_y V^i(\theta_p) N_1 V^{-1}(\theta_p) N \left[ A^n(\theta_p) x_{\theta_p}(k|k) + B_m(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k \right] - y^{sp} \quad \text{(VI-41)}$$

$$J_k(\Delta u_k, \delta_k(\theta_p), \theta_p) \leq J_k(\tilde{\Delta u}_k, \tilde{\delta}_k(\theta_p), \theta_p) \quad \text{(VI-42)}$$

$$\begin{aligned}
J_k(\tilde{\Delta u}_k, \tilde{\delta}_k(\theta_p), \theta_p) & - \begin{bmatrix} \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \Theta(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \tilde{\delta}_k(\theta_p) \end{bmatrix}^T \\
& \bar{Q} \begin{bmatrix} \Psi(\theta_p) x_{\theta_p}(k) + \Theta(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \tilde{\delta}_k(\theta_p) \end{bmatrix} + \\
& \tilde{\Delta u}_k^T B_m(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k + 2 x_{\theta_p}^T(k) \left[ A^n(\theta_p)^T x_{\theta_p}(k) + B_m(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k \right] \\
& \tilde{Q}(\theta_p) B_m(\theta_p) \tilde{\Delta u}_k + x_{\theta_p}^T(k) A^n(\theta_p)^T \tilde{Q}(\theta_p) A^n(\theta_p) + \\
& \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\Delta u}(k+j|k) R \tilde{\Delta u}(k+j|k) + \tilde{\delta}_k^T(\theta_p) S \tilde{\delta}_k(\theta_p)
\end{aligned}$$

Para evitar ações extremamente conservadoras, a função objetivo do problema de otimização considerará apenas o caso de modelo mais provável para o processo, aqui

definido como  $\theta_N$ . Esse modelo pode ser escolhido pela região de operação mais comum da unidade, por exemplo.

Conseqüentemente, a solução do problema, indicado em **(VI-43)**, gera uma lei de controle robusta para o caso de um processo com apenas polos estáveis.

$$\min_{\Delta u_k, \tilde{\delta}_k(\theta_N)} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T(\theta_N) \end{bmatrix} H_N \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta_N) \end{bmatrix} + 2c_{Nf}^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k(\theta_N) \end{bmatrix} + c_n \quad \text{(VI-43)}$$

s.a.

$$\begin{aligned} & C_y V^i(\theta_p) N_1 V^{-1}(\theta_p) N \left[ A^n(\theta_p) x(k|k) + B_m(\theta_p) \Delta u_k \right] - y^{sp} \\ & \quad - \delta_k(\theta_p) = 0, p = 1, \dots, L \quad \text{(VI-24)} \\ & -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max} \\ & u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max} \\ & J_k(\Delta u_k, \delta_k(\theta_p), \theta_p) \leq J_k(\tilde{\Delta u}_k, \tilde{\delta}_k(\theta_p), \theta_p) \\ & H_N - \begin{bmatrix} B_m(\theta_N)^T \tilde{Q} B_m(\theta_N) + \Theta(\theta_N)^T \bar{Q} \Theta(\theta_N) + \bar{R} & -\Theta(\theta_N)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta(\theta_N) & \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S \end{bmatrix} \\ & c_{Nf}^T - \begin{bmatrix} x_{\theta_N}^T(k) A^n(\theta_N)^T \tilde{Q} B_m(\theta_N) + \left( \Psi(\theta_N) x_{\theta_N}(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \Theta(\theta_N) \\ - \left( \Psi(\theta_N) x_{\theta_N}(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix}^T \\ & c_N - \begin{bmatrix} x_{\theta_N}^T(k) A^n(\theta_N)^T \tilde{Q} A^n(\theta_N) x_{\theta_N}(k) + \left[ \Psi(\theta_N) x_{\theta_N}(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \\ \left[ \Psi(\theta_N) x_{\theta_N}(k) - \bar{y}^{sp} \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A existência da restrição de contração da função objetivo torna este problema com restrição não linear. Desta forma, foi utilizada a função *fmincon* do Matlab para a sua solução.

### VI.3. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS E PARA O CASO ROBUSTO

Considere um sistema estável cujo modelo real é desconhecido, mas que reside dentro de um conjunto  $\Omega$ . Se o novo estado estacionário desejado é realizável, o problema definido em **(VI-43)** fornece uma lei de controle estável e que conduz o sistema real a este novo estado estacionário com uma resposta de erro decrescente ao longo do tempo.

PROVA: Seja o conjunto de soluções ótimas do problema indicado em **(VI-43)**  $[\Delta u^*(k|k) \ \Delta u^*(k+1|k) \ \dots \ \Delta u^*(k+m-1|k)]$  e  $[\delta_k^*(\theta_1) \ \delta_k^*(\theta_2) \ \dots \ \delta_k^*(\theta_L)]$ , onde  $L$  é o número total de modelos, o conjunto de folgas que satisfaz a restrição **(VI-24)** e que  $J_k^*$  seja o valor ótimo da função de custo para este conjunto de soluções. Desta forma, pode-se afirmar que para o modelo  $\theta_p$  que corresponda ao modelo real do processo,  $\theta_T$ :

$$J_k^* = \sum_{j=0}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) \quad \text{(VI-44)}$$

$$J_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)] + [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)]^T Q [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) + \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) \quad \text{(VI-45)}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) = J_k^* - [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)]^T Q [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T)] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) \quad \text{(VI-46)}$$

Para este instante, a restrição escrita no espaço transformado  $z$  e indicada em **(VI-20)**, é satisfeita.

$$C_y V^i(\theta_T) z_{\theta T}^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) = 0 \quad \text{(VI-47)}$$

Se  $\Delta u_k^*(k|k)$ , primeiro conjunto de ações de controle calculado pelo programa de otimização, for aplicado ao sistema **(IV-21)**, então, no instante  $k+1$  seguinte, a sequência  $\tilde{\Delta u}_{k+1} = [\Delta u^*(k+1|k) \ \dots \ \Delta u^*(k+m-1|k) \ 0]$  é uma solução que pode ser proposta para o problema **(VI-43)**. As folgas dos polos integradores de cada modelo disponível,  $[\tilde{\delta}_{k+1}(\theta_1) \ \dots \ \tilde{\delta}_{k+1}(\theta_L)]$ , serão calculadas de forma a satisfazer a

restrição **(VI-20)**, escrita no estado medido e corrente, restrição **(VI-24)**. No entanto, para o modelo correspondente à planta verdadeira, a solução do instante anterior  $k$ ,  $\delta_k^*(\theta_T)$ , continua satisfazendo a restrição, pois a trajetória das variáveis controladas no instante  $k+n$  será a mesma da planta real para o modelo correspondente, ou seja, existe um modelo  $p$  igual ao processo tal que:

$$z_{\theta_p}^i(k+1+n|k+1) = z_{\theta_p}^i(k+n+2|k) = z_{\theta_T}^i(k+n|k) \quad \text{(VI-48)}$$

Isso garante que o mesmo valor de folga do instante anterior continua satisfazendo a restrição. Portanto,  $\tilde{\delta}_{k+1}(\theta_T) = \delta_k^*(\theta_T)$ , onde  $\theta_T$  corresponde ao modelo real da planta. Para esta sequência de controle, o valor de  $J_{k+1}$  correspondente à função objetivo do modelo associado ao processo será:

$$J_{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) \quad \text{(VI-49)}$$

$J_{k+1}$  - Valor não otimizado da função objetivo no instante  $k+1$

$$J_{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) + \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \quad \text{(VI-50)}$$

Substituindo **(VI-46)** na equação **(VI-50)**, vem:

$$J_{k+1} = J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) + \delta_k^*(\theta_T)^T S \delta_k^*(\theta_T) + \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \quad \text{(VI-51)}$$

Na equação indicada em **(VI-51)**, o termo em infinito é nulo, conforme demonstração a seguir:

$$\begin{aligned} & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] = \\ & \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \end{aligned} \quad \text{(VI-52)}$$

Na equação (VI-52), o termo  $x_y(k+\infty+1|k)$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} x_y(k+\infty+1|k) &= Vz(k+\infty+1|k) = VA_d^{\infty+1} z(k+n|k) \\ x_y(k+\infty+1|k) &= \begin{bmatrix} V^i & V^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st^{\infty+1}}(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_T}^i(k+n|k) \\ z_{\theta_T}^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} \\ x_y(k+\infty+1|k) &= V^i z_{\theta_T}^i(k+n|k) + V^{st} F^{st^{\infty+1}}(\theta_T) z_{\theta_T}^{st}(k+n|k) \end{aligned} \quad \text{(VI-53)}$$

Mas para os polos estáveis, tem-se que  $F^{st^{\infty+1}}(\theta_T) = 0$ .

$$\begin{aligned} & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] = \\ & \left[ C_y V^i(\theta_T) z_{\theta_T}^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ C_y V^i(\theta_T) z_{\theta_T}^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \end{aligned} \quad \text{(VI-54)}$$

No entanto, a restrição indicada em (VI-47) garante que a equação (VI-54) seja nula. Portanto, o valor da função objetivo para a planta neste instante  $k+1$  será:

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \\ &\quad - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) \end{aligned} \quad \text{(VI-55)}$$

Como  $Q$  e  $R$  são positivos, pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} \leq J_k^* \quad \text{(VI-56)}$$

A solução ótima para o problema (VI-43) será menor ou igual à solução viável. Portanto:

$$\begin{aligned} J_{k+1}^* &\leq J_k^* - \left[ Cx(k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right]^T Q \left[ Cx(k) - y^{sp} - \delta_k^*(\theta_T) \right] \\ &\quad - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) \end{aligned} \quad \text{(VI-57)}$$

$J_{k+1}^*$  - Valor ótimo da função objetivo no instante  $k+1$

A relação indicada em (VI-57) mostra que, como o valor da função objetivo tende a diminuir e  $\Delta u$  é nulo para um instante suficientemente grande, a malha fechada correspondente ao modelo verdadeiro da planta é estável e converge para o ponto estacionário no qual:



$$Cx(\bar{k}) - y^{sp} = \delta_k^*(\theta_T) \quad \text{(VI-58)}$$

$\bar{k}$  - Instante de tempo suficientemente grande

Como  $x(\bar{k})$  corresponde ao estado medido, últimas entradas e últimas saídas do processo, tanto o estado  $x(\bar{k})$  como  $y^{sp}$  serão os mesmos para todos os modelos. Desta forma, as folgas calculadas vão todas convergir para o mesmo valor.

$$\delta_k^*(\theta_T) = \delta_k^*(\theta_1) = \dots = \delta_k^*(\theta_L) \quad \text{(VI-59)}$$

Este valor será nulo se o peso  $S$  para as variáveis de folga na função objetivo for grande o suficiente, e o novo estado for alcançável. Desta forma, a equação (VI-58) permanecerá verdadeira apenas se:

$$Cx(\bar{k}) - y^{sp} = 0 \quad \text{(VI-60)}$$

Isso mostra que a sequência da função de custo para a planta real é uma série decrescente e converge para zero, embora  $J_k(\theta_p)$  não seja necessariamente decrescente para  $\theta_p \neq \theta_T$ .

#### VI.4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Retornando à coluna do item V.7, será considerada uma incerteza no modelo da parte estável, conforme indicado em (VI-61) e (VI-62).

$$y_2(s) = \frac{4,7e^{-7s}}{9,3s+1}u_1(s) + \frac{1,4 \times 10^{-3}e^{-2s}}{6,8s+1}u_2(s) + \frac{0,4e^{-3s}}{11,6s+1}u_3(s) \quad \text{(VI-61)}$$

$$y_2(s) = \frac{2,3e^{-3s}}{11,163s+1}u_1(s) + \frac{2,8 \times 10^{-3}e^{-s}}{8,16s+1}u_2(s) + \frac{0,96e^{-3s}}{13,92s+1}u_3(s) \quad \text{(VI-62)}$$

A Tabela VI-1 mostra os parâmetros que foram adotados para o controlador.

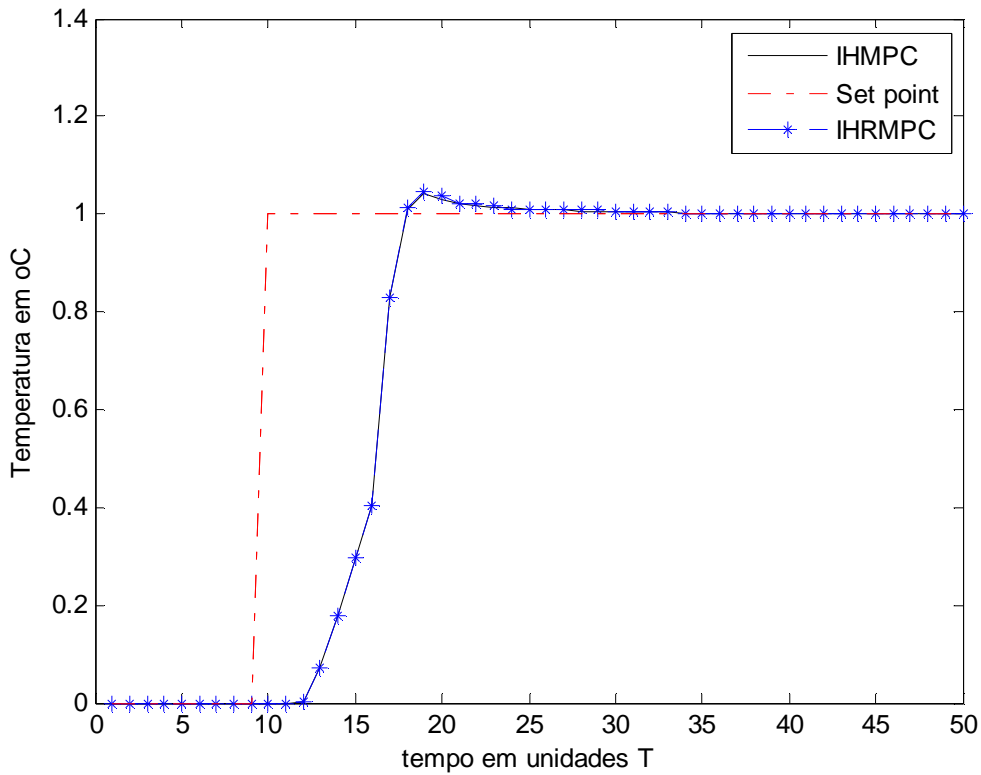
Inicialmente, o controlador considera o modelo (VI-61) como nominal e o mesmo modelo foi considerado na simulação como modelo real da planta. A Figura VI-1 mostra o desempenho deste controlador robusto que, praticamente, coincide com controlador nominal. A Figura VI-2 mostra o comportamento das entradas para ambos

os controladores e a Figura VI-3 o comportamento da função objetivo do controlador robusto. A legenda foi definida como IHMPC para o controlador nominal e IHRMPC para o controlador robusto.

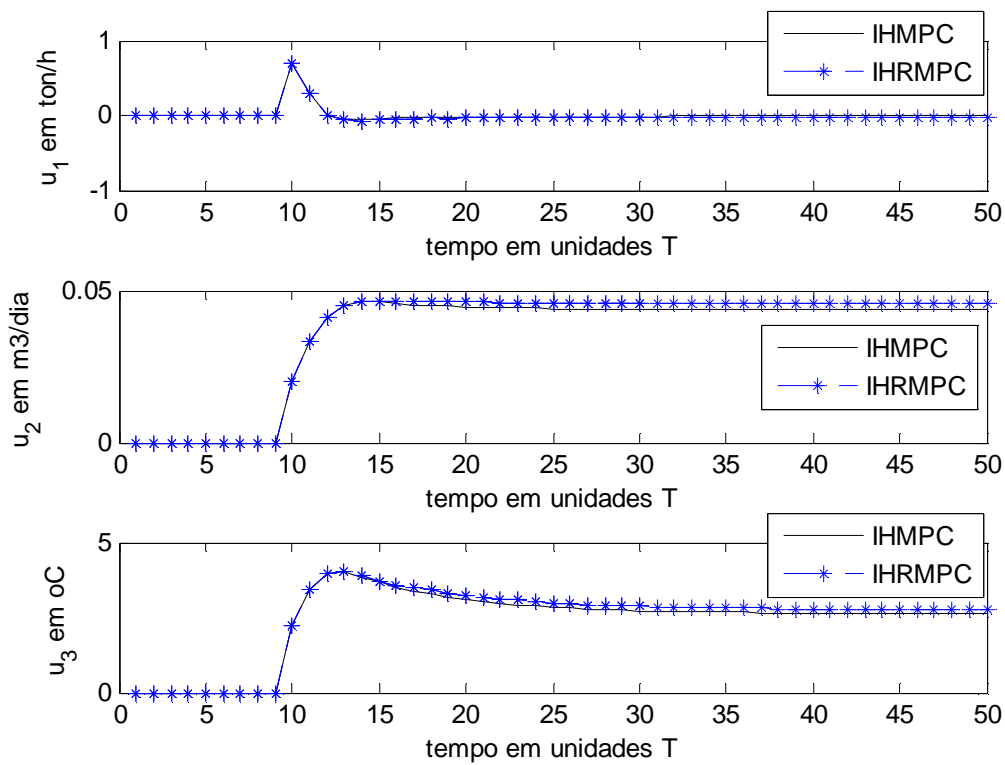
A Figura VI-4 e a Figura VI-5 mostram as respostas obtidas a um degrau unitário no *set point* do controlador quando o modelo nominal, equação (VI-61), não coincide com o modelo da planta, equação (VI-62). O controlador projetado apenas para o caso nominal instabilizou. O controlador robusto manteve a estabilidade sem uma diminuição significativa da performance.

**Tabela VI-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo estável**

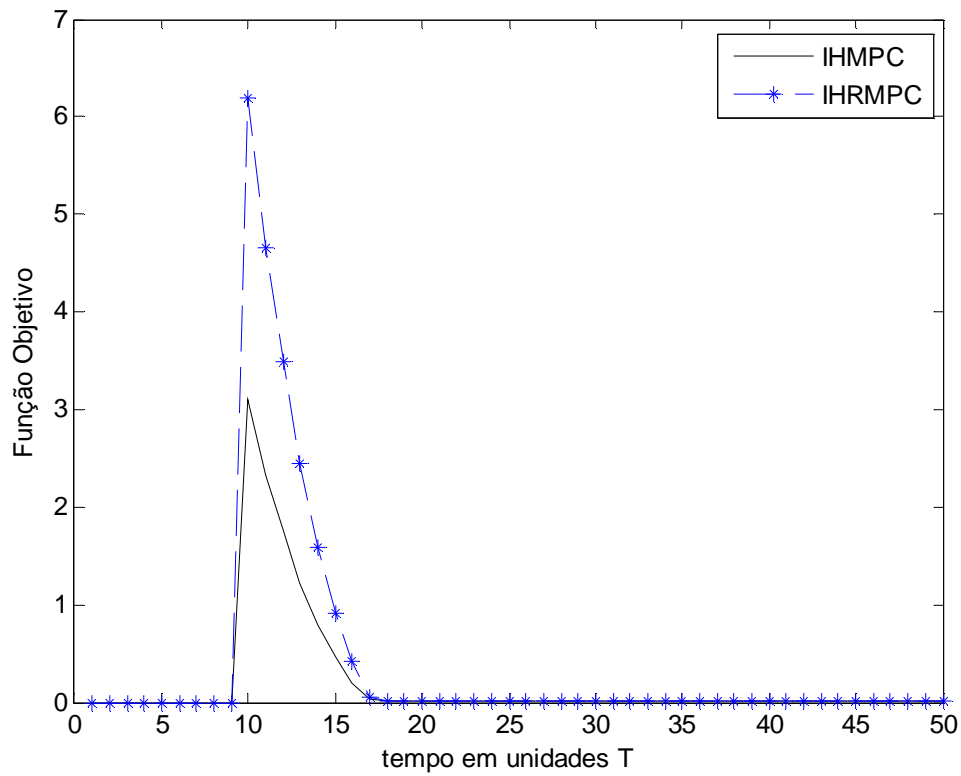
Descrição	Simbologia	Valor
Horizonte de controle	$m$	3
Horizonte de controle estendido	$n$	5
Peso das variáveis controladas	$Q$	1
Fator de supressão	$R$	[0,1 0,1 0,1]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S$	[1000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[100 100 100]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-100 -100 -100]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[10,2 10,2 10,2]



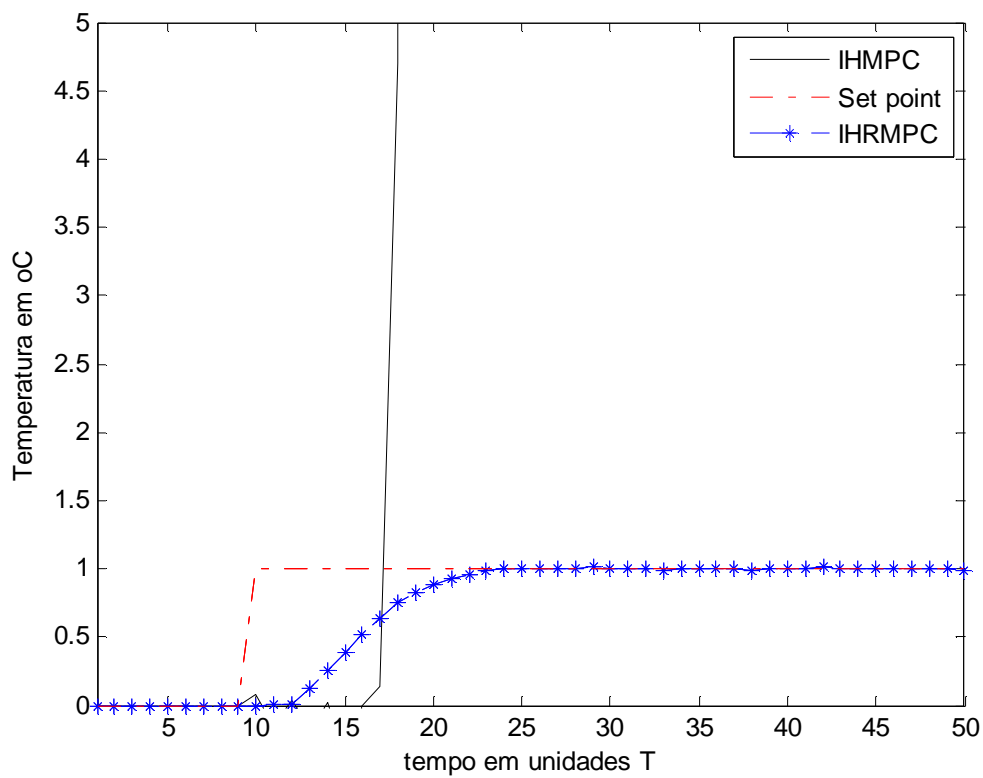
**Figura VI-1– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHRMPC - caso planta estável**



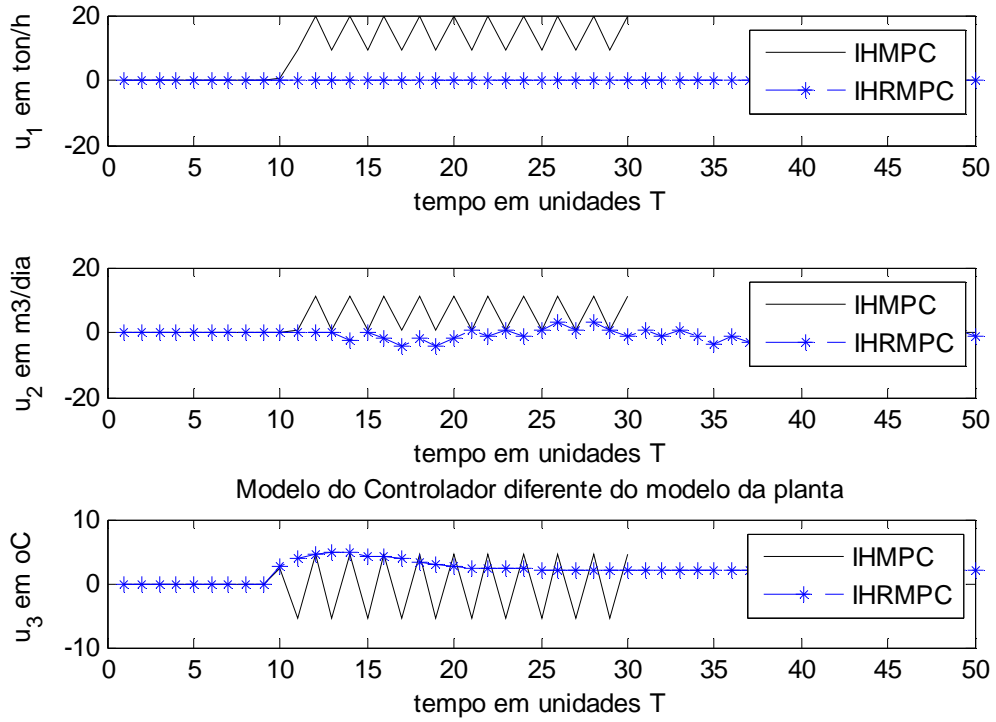
**Figura VI-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do RIHMPC - caso planta estável**



**Figura VI-3– Comportamento da função objetivo da planta frente a um degrau unitário no set point do IHMPC nominal e robusto - caso planta estável**



**Figura VI-4– Resposta da saída a um degrau unitário no set point do IHMPC robusto - caso planta estável**



**Figura VI-5– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário no set point do IHMPC robusto - caso planta estável**

## VII. IHMPC COM FEEDBACK DE SAÍDA PARA PROCESSOS INTEGRADORES PUROS COM OU SEM TEMPO MORTO

---

### VII.1. INTRODUÇÃO

Outra característica de uma unidade industrial é a presença de polos integradores no modelo do processo. Estes polos representam em geral, na prática, um sistema que envolva uma variável de nível ou de pressão em um vaso, por exemplo.

Normalmente uma variável controlada costuma ser integradora em relação a todas variáveis manipuladas envolvidas no sistema. Outra característica para estas variáveis é a menor incerteza no modelo, principalmente no ganho do processo, por conta do mesmo ser definido a partir de dimensões físicas, tais como área da seção transversal ou do volume.

Neste capítulo será apresentado um controlador preditivo para um sistema integrador puro.

### VII.2. MODELO DE PROCESSO

A forma de representação do processo indicada no item IV.2 também será utilizada neste capítulo. Portanto, o estado será representado conforme a equação **(IV-9)**, a matriz de estados conforme **(IV-10)**, a matriz de entradas conforme **(IV-15)** e a matriz de transformação de estado para saída de processo conforme equação **(IV-18)**.

A equação indicada em **(VII-1)** representa um modelo típico para um sistema integrador puro.

$$y(s) = \frac{\bar{k}_p}{s} u(s) \quad \text{(VII-1)}$$

$\bar{k}_p$  - Ganho estático do processo

Transformando a equação **(VII-1)** do domínio de Laplace para o domínio discreto, vem:

$$y(z) = k_p \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} u(z) \quad (\text{VII-2})$$

$k_p$  - Ganho estático do processo combinado com o período de amostragem do controlador

Transformando a equação **(VII-2)** em equações de diferenças:

$$y(k) - y(k-1) = k_p u(k-1) \quad (\text{VII-3})$$

Escrevendo **(VII-3)** no instante seguinte  $k+1$  e obtendo a expressão para o modelo incremental, vem:

$$y(k+1) - y(k) = k_p u(k) \quad (\text{VII-4})$$

$$y(k+1) - 2y(k) + y(k-1) = k_p \Delta u(k) \quad (\text{VII-5})$$

$$y(k+1) = 2y(k) - y(k-1) + k_p \Delta u(k) \quad (\text{VII-6})$$

Desta forma, para um sistema integrador puro, a matriz  $A_y$  fica sendo:

$$A_y = \begin{bmatrix} 2I_{ny} & -I_{ny} \\ I_{ny} & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad A_y \in \mathbb{R}^{2ny \times 2ny}, na = 1 \quad (\text{VII-7})$$

Pode-se notar que a matriz  $A_y$  indicada em **(VII-7)** possui  $2ny$  autovalores localizados em  $+1$ .

$$\begin{aligned} \det[A_y - \lambda I] &= \det \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right\} \\ &= -\lambda(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{VII-8})$$

O primeiro autovalor obtido pode ser atribuído ao modelo incremental, enquanto que o segundo ao processo.

As demais matrizes do modelo indicado em **(IV-21)**, e a seguir repetido para facilidade do leitor, para o sistema integrador puro ficam da forma indicadas em **(VII-7)**, **(VII-9)** a **(VII-16)**:

$$\begin{bmatrix} x_y(k+1|k) \\ x_{\Delta u}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u} \\ \bar{I} \end{bmatrix} \Delta u(k) \quad (\text{IV-21})$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_y & C_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2I_{ny} & -I_{ny} \\ I_{ny} & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad A_y \in \mathbb{R}^{2ny \times 2ny} \quad (\text{VII-7})$$

$$A_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_2 & \cdots & B_{nb} \\ 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \end{bmatrix}, \quad A_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{2ny \times (nb-1)nu} \quad (\text{VII-9})$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_{nu} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_{nu} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{I} \in \mathbb{R}^{(nb-1)nu \times (nb-1)nu} \quad (\text{VII-10})$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{nu} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{I} \in \mathbb{R}^{(nb-1)nu \times nu} \quad (\text{VII-11})$$

$$B_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{2ny \times nu}, B_1 \in \mathbb{R}^{ny \times nu} \quad (\text{VII-12})$$

$$C_y = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y \in \mathbb{R}^{ny \times 2ny} \quad (\text{VII-13})$$

$$C_{\Delta u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{ny \times (nb-1)nu} \quad (\text{VII-14})$$

$$x_y = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix}, \quad x_y \in \mathbb{R}^{(na+1)ny \times 1} \quad (\text{VII-15})$$

$$x_{\Delta u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb+1) \end{bmatrix}, \quad x_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{(nb-1)nu \times 1} \quad (\text{VII-16})$$

Na equação **(VII-9)**, os valores de  $B_2 \cdots B_{nb}$  referem-se a uma generalização do modelo de integrador puro considerando tempo morto.

### VII.3. FUNÇÃO OBJETIVO

Alterando a função objetivo indicada em **(V-57)** para incluir duas folgas, uma referente ao pólo integrador do modelo incremental,  $\delta_k$ , e a outra referente ao pólo integrador do processo,  $\delta_k^i$  e incluindo o peso de  $\delta_k^i$  sobre a função de custo de modo



matematicamente conveniente, vem:

$$\begin{aligned}
J_k &= \sum_{j=1}^n \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right]^T Q \left[ Cx(k+n+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right] \quad \text{(VII-17)} \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k)^T R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_k^{iT} S_2 \delta_k^i
\end{aligned}$$

- $J_k$  - Função de custo para o instante  $k$
- $x(k+j|k)$  - Predição para o estado feita instante  $k$  para o instante  $k+j$
- $\Delta u(k+j|k)$  - Predição para a entrada feita instante  $k$  para o instante  $k+j$
- $Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas,  $Q \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $R$  - Matriz de supressão das variáveis manipuladas,  $R \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$
- $S_1$  - Matriz para penalização das folgas associada a  $\delta_k$ ,  $S_1 \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $\delta_k$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador do modelo incremental,  $\delta_k \in \mathbb{R}^{ny}$
- $S_2$  - Matriz para penalização das folgas associada a  $\delta_k^i$ ,  $S_2 \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $\delta_k^i$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador do processo,  $\delta_k^i \in \mathbb{R}^{ny}$

O termo em  $j$  aparece na equação (V-17) para facilitar a separação da restrição relacionada aos polos integradores do modelo incremental da restrição relacionada aos polos integradores do processo. Estas restrições, como será visto a seguir, evitam que a função de custo cresça indefinidamente.

A predição para o instante  $n+j$  em relação ao instante atual  $k$  é:

$$Cx(k+n+j|k) = C_y x_y(k+n+j|k) = C_y A_y^j x_y(k+n|k) \quad \text{(VII-18)}$$

Decompondo a matriz  $A_y$  através da transformação de Jordan, vem:

$$A_y = V A_d V^{-1} \quad \text{(VII-19)}$$

$$A_d \quad - \quad \begin{bmatrix} I_{ny} & I_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix}, \text{ para o caso estudado}$$

A obtenção de  $A_d$  pode ser feita manualmente via as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
V_1 &= null(A - I) \\
V_2 &= pinv(A - I) \times V_1 \\
V &= [V_1 \quad V_2] \\
A_d &= V^{-1} A_y V
\end{aligned} \tag{VII-20}$$

A razão para a obtenção manual da matriz de autovalores  $A_d$  e da matriz de autovetores  $V$  é que pelo comando do Matlab (*eig*) obtém-se dois autovetores repetidos e iguais a [0,7071; 0,7071]. Desta forma, a matriz  $V$  teria determinante nulo, o que torna ela não inversível, gerando problemas numéricos na solução do controlador.

Substituindo (VII-19) em (VII-18):

$$Cx(k+n+j|k) = C_y x_y(k+n+j|k) = C_y V \begin{bmatrix} I_{ny} & jI_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} V^{-1} x_y(k+n|k) \tag{VII-21}$$

Aplicando a transformação de estados que é possível após o instante  $n$ :

$$x_y = \begin{bmatrix} V^{is} & V^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is} \\ z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is} \\ z^i \end{bmatrix}, \quad z^{is}, z^i \in \mathbb{R}^{ny} \tag{VII-22}$$

- $V_1^{is}$  - São os autovetores associados aos polos integradores gerados no modelo incremental,  $V_1^{is} \in \mathbb{R}^{ny}$ .
- $V_2^{is}$  - São os autovetores associados aos polos integradores gerados no modelo incremental,  $V_2^{is} \in \mathbb{R}^{ny}$ .
- $V_1^i$  - São os autovetores associados aos polos integradores do processo integrador,  $V_1^i \in \mathbb{R}^{ny}$ .
- $V_2^i$  - São os autovetores associados aos polos integradores do processo integrador,  $V_2^i \in \mathbb{R}^{ny}$ .
- $V^{is}$  - São os autovetores associados aos polos integradores do processo integrador,  $V^{is} \in \mathbb{R}^{2ny \times ny}$ .
- $V^i$  - São os autovetores associados aos polos integradores do processo integrador,  $V^i \in \mathbb{R}^{2ny \times ny}$ .

Substituindo (VII-22) em (VII-21):

$$Cx(k+n+j|k) = C_y \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & jI_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \tag{VII-23}$$

$$Cx(k+n+j|k) = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & jI_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \tag{VII-24}$$

Utilizando **(VII-24)** na soma infinita em **(VII-17)**, vem:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{c} \left[ I_{ny} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & jI_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \\ Q \left[ I_{ny} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & jI_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \end{array} \right]^T \quad \text{(VII-25)}$$

Realizando a operação matricial indicada em **(VII-25)**:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{c} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + (jV_1^{is} + V_1^i) z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + (jV_1^{is} + V_1^i) z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \end{array} \right]^T Q \quad \text{(VII-26)}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{c} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + jV_1^{is} z^i(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + jV_1^{is} z^i(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \end{array} \right]^T Q \quad \text{(VII-27)}$$

Para que a soma indicada em **(VII-27)** seja limitada, devemos impor que todos os termos sejam nulos, tendo em vista que não existem, neste caso, polos estáveis no processo.

Portanto:

$$V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad \text{(VII-28)}$$

e:

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_k^i = 0 \quad \text{(VII-29)}$$

Utilizando a transformação de estados e a predição **(V-44)**, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} = V^{-1} x_y(k+n|k) = V^{-1} N \{ A^n x(k|k) + B_m \Delta u_k \} \quad \text{(VII-30)}$$

$$N = \begin{bmatrix} I_{2ny} & 0_{2ny \times [ny+(nb-1), nu]} \end{bmatrix}, \quad N \in \mathbb{R}^{2ny \times (nb-1), nu}, \quad \text{para o caso estudado}$$

Separando as equações referentes aos modos integradores do modelo e os modos integradores do processo:

$$z^{is}(k+n|k) = N_1 V^{-1} N A^n x(k|k) + N_1 V^{-1} N B_m \Delta u_k \quad (\text{VII-31})$$

$$\begin{aligned} N_1 & - \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \\ z^{is} & - \text{Modos integradores referentes ao modelo incremental} \end{aligned}$$

$$z^i(k+n|k) = N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k \quad (\text{VII-32})$$

$$\begin{aligned} N_2 & - \begin{bmatrix} 0_{ny} & I_{ny} \end{bmatrix} \\ z^i & - \text{Modos integradores referentes ao processo} \end{aligned}$$

Substituindo **(VII-31)** e **(VII-32)** em **(VII-28)** para escrever a restrição em função do estado lido do processo:

$$\begin{aligned} V_1^{is} \left[ N_1 V^{-1} N A^n x(k|k) + N_1 V^{-1} N B_m \Delta u_k \right] + \\ V_1^i \left[ N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k \right] - y^{sp} - \delta_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII-33})$$

$$\begin{aligned} V_1^{is} N_1 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_1 V^{-1} N B_m \Delta u_k + \\ V_1^i N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^i N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII-34})$$

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad (\text{VII-35})$$

De forma análoga para a restrição indicada em **(VII-29)**:

$$V_1^{is} \left[ N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k \right] - \delta_k^i = 0 \quad (\text{VII-36})$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0 \quad (\text{VII-37})$$

Satisfazendo as restrições **(VII-35)** e **(VII-37)**, a soma infinita indicada em **(VII-17)** é nula.

Desta forma, a função objetivo do IHMPC para um sistema integrador puro fica restrita à soma finita até o horizonte de controle estendido  $n$ , o peso da manipulação das entradas e o peso das folgas envolvidas no problema para sua relaxação.

Substituindo a predição até o instante  $n$  pela equação **(III-23)**, a função de custo passa a ser:

$$\begin{aligned}
J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_k^i) &= \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right]^T \bar{Q} \\
& \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right] + \Delta u_k^T \bar{R} \Delta u_k \\
& + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_k^{i^T} S_2 \delta_k^i
\end{aligned} \tag{VII-38}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}^{sp} &= \begin{bmatrix} y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}^{sp} \in \mathbb{R}^{(n,ny)} \\
\bar{I}_{ny} &= \begin{bmatrix} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{n,ny} \\
\tilde{I}_{ny} &= \begin{bmatrix} I_{ny} \\ 2I_{ny} \\ \vdots \\ nI_{ny} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{n,ny} \\
\Psi &= \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} \\
\Theta &= \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^mB & CA^{m-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \dots & CA^{n-m}B \end{bmatrix} \\
\bar{Q} &= \begin{bmatrix} Q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n,ny) \times (n,ny)}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão **(VII-38)**, para se obter a expressão da função de custo na forma de um problema de programação quadrática, vem:

$$J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_k^i) = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T & \delta_k^{iT} \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \end{bmatrix} + c \quad (\text{VII-39})$$

$$H = \begin{bmatrix} \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & -\Theta^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta & S_1 + \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\ -\tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta & \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & S_2 + \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \end{bmatrix}$$

$$c_f^T = \begin{bmatrix} \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \theta \\ - \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ - \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \end{bmatrix}^T$$

$$c = \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} \right)$$

Para a solução do problema (VII-39), este pode ser subdividido em dois problemas: o primeiro minimiza as folgas com referência aos polos integradores do processo e o segundo, com esta folga minimizada, resolve o problema de otimização da função objetivo. A vantagem desta divisão está na estabilidade comprovada conseguida pelos dois subproblemas obtidos, como será visto no item VII.4.

Problema A:

$$\min_{\Delta u_{k,a}, \delta_k^i} \begin{bmatrix} \Delta u_{k,a}^T & \delta_{k,a}^{iT} \end{bmatrix} H_a \begin{bmatrix} \Delta u_{k,a} \\ \delta_{k,a}^i \end{bmatrix} + 2c_{f,a}^T \begin{bmatrix} \Delta u_{k,a} \\ \delta_{k,a}^i \end{bmatrix} \quad (\text{VII-40})$$

s.a.

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}$$

onde:

$$H_a = \begin{bmatrix} \bar{R} \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \quad H_a \in \mathbb{R}^{(m.nu+ny) \times (m.nu+ny)}$$

$$c_{f,a}^T = [0], \quad c_{f,a}^T \in \mathbb{R}^{m.nu+ny}$$

Neste problema A o fator de supressão é praticamente anulado, de forma que o algoritmo de otimização possui basicamente, como variável de decisão, as folgas associadas aos polos integradores do processo.

No instante da solução do problema B, a folga dos polos integradores do processo já terão um valor definido no problema A e os termos  $\delta_{k,a}^i \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k$  e  $\delta_{k,a}^i \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k$  só dependerão de  $\Delta u_k$  e de  $\delta_k$ . Desta forma:

Problema B:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T \end{bmatrix} H_b \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} + 2c_{f,b}^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \end{bmatrix} + c \quad (\text{VII-41})$$

s.a.

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0$$

$$\delta_k^i = \delta_{k,a}^{i*}$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}$$

onde:

$$H_b - H_b = \begin{bmatrix} \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta & S_1 + \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix}, \quad H_b \in \mathbb{R}^{(m.nu+ny) \times (m.nu+ny)}$$

$$c_{f,b}^T - \begin{bmatrix} \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right)^T \bar{Q} \theta \\ - \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \end{bmatrix}^T, \quad c_{f,b}^T \in \mathbb{R}^{m.nu+ny}$$

$\delta_{k,a}^{i*}$  - Solução do problema A para a folga dos modos integradores do processo

$$c - \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right)^T \bar{Q} \left( \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right)$$

A restrição (VII-37) continuou presente no problema B, pois as novas soluções encontradas para as entradas aplicadas ao processo devem continuar satisfazendo esta condição.

Pelo mesmo motivo que foi usado para o problema nominal no caso estável, o problema (VII-41) considera a existência da constante por conta do caso robusto, onde a contração da função objetivo é uma restrição a ser incluída no problema de otimização.

## VII.4. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS INTEGRADORES PUROS

Seja  $[\Delta u^*(k|k) \ \Delta u^*(k+1|k) \ \dots \ \Delta u^*(k+m-1|k)]$  e  $\delta_k^*$  a solução ótima no instante  $k$  do problema indicado em **(VII-41)** enquanto que  $\delta_{k,a}^{i*}$  foi a solução encontrada no problema **(VII-40)**.

Lembrando que o fator de supressão foi praticamente anulado para o problema A, este pode ser reescrito de uma forma mais adequada para o desenvolvimento da prova da estabilidade, conforme indicado em **(VII-42)**.

$$\min_{\Delta u_{a,k}, \delta_k^i} \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \quad \text{(VII-42)}$$

s.a.

$$\begin{aligned} V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_k^i &= 0 \\ -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) &\leq \Delta u_{\max} \end{aligned} \quad \text{(VII-29)}$$

Neste instante  $k$ , a função objetivo será:

$$J_{k,a}^* = \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \quad \text{(VII-43)}$$

Ainda neste instante, a restrição indicada em **(VII-29)** é satisfeita e igual a:

$$V_1^{is} z_b^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(VII-44)}$$

Observe que o estado transformado  $z^i(k+n|k)$  indicado em **(VII-44)** aparece com um índice  $b$ , que se refere a uma predição feita neste instante  $k$  pelo problema de otimização B, considerando as ações de controle por ele calculadas, onde a primeira entrada foi aplicada ao processo. Este problema calcula essas ações também levando em consideração esta restrição **(VII-44)** para manter o valor  $\delta_{k,a}^{i*}$  calculado pelo problema A.

Se não houver distúrbios, para o instante seguinte, uma possível solução seria:

$$\delta_{k+1,a}^i = \delta_{k,a}^{i*} \text{ e } \Delta u_{k+1,a} = \tilde{\Delta u}_{k+1,b} \quad \text{(VII-45)}$$

$$\tilde{\Delta u}_{k+1,b} \quad - \quad \left[ \Delta u^*(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1|k)^T \quad 0 \right]^T$$



Esta solução é viável para o problema A se a restrição **(VII-29)** for satisfeita neste instante seguinte:

$$V_1^{is} z_b^i(k+1+n|k+1) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(VII-46)}$$

Como as ações aplicadas à planta estão sendo realizadas pelo problema B, a trajetória das variáveis controladas está sendo definida pelo mesmo e, não havendo perturbações, tem-se que:

$$z_b^i(k+1+n|k+1) = z_b^i(k+n+2|k) = z^i(k+n+2|k) \quad \text{(VII-47)}$$

A predição do estado transformado  $z$  pode ser feita por:

$$\begin{bmatrix} z^{is}(k+n+1|k) \\ z^i(k+n+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ny} & I_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \quad \text{(VII-48)}$$

A expressão indicada em **(VII-48)** permite concluir que:

$$z^{is}(k+n+1|k) = z^{is}(k+n|k) + z^i(k+n|k) \quad \text{(VII-49)}$$

$$z^i(k+n+2|k) = z^i(k+n+1|k) = z^i(k+n|k) \quad \text{(VII-50)}$$

Como já dito anteriormente, a predição  $z^i(k+n|k)$  que aparece em **(VII-50)** corresponde ao valor esperado pelo problema B, pois são seus resultados, obtidos para  $\Delta u(k)$ , que são aplicados às entradas do processo. Este resultado, deslocado agora de uma ação de controle e, supondo que a última ação do horizonte de controle seja nula, é que está sendo aqui analisado.

O valor de  $z^i(k+n|k)$  do problema B também satisfaz a restrição imposta no problema A e seu valor é passado a este problema através da sequência de ações  $\Delta \tilde{u}_{k+1,b}$ .

Portanto, substituindo **(VII-50)** e **(VII-47)** em **(VII-46)**, conclui-se que esta solução proposta é viável para o problema A e o valor da função objetivo para este valor não ótimo será:

$$J_{k+1,a} = J_{k,a}^* \quad \text{(VII-51)}$$

A solução ótima será menor ou igual a solução da iteração anterior.

Conforme as restrições nos incrementos máximos das variáveis manipuladas, o valor

mínimo de  $\delta_{k,a}^i$  pode ser obtido em uma iteração, o que corresponde a não ter estas restrições ativas, ou em um número finito de iterações, quando a restrição é a limitação da otimização do problema A.

Para o problema B, aqui reescrito, conforme indicado em (VII-17), de uma forma mais adequada para o desenvolvimento da prova da estabilidade, tem-se:

$$\min_{\Delta u_{b,k}, \delta_k} J_k \quad \text{(VII-52)}$$

s.a.

$$V_1^{is} z^{is} (k+n|k) + V_1^i z^i (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad \text{(VII-28)}$$

$$V_1^{is} z^i (k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(VII-44)}$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u (k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

No instante  $k$ , a solução ótima satisfaz as restrições do problema.

$$V_1^{is} z^{is} (k+n|k) + V_1^i z^i (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad \text{(VII-53)}$$

$$V_1^{is} z^i (k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(VII-54)}$$

A função objetivo para este instante pode ser escrita como:

$$J_k^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^* (k+j|k)^T R \Delta u^* (k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \quad \text{(VII-55)}$$

$$J_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^* (k+j|k)^T R \Delta u^* (k+j|k) + \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\ \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \Delta u^* (k|k)^T R \Delta u^* (k|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \quad \text{(VII-56)}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) = \tag{VII-57} \\
& J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) \\
& - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*}
\end{aligned}$$

Se  $\Delta u^*(k|k)^T$  e  $\delta_k^*$  forem aplicados ao sistema **(IV-21)** e não houver nenhum distúrbio, então, no instante  $k+1$  seguinte, a sequência indicada em **(VII-58)** é uma solução possível para este instante.

$$\Delta \tilde{u}_{k+1,b} = \left[ \Delta u^*(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1|k)^T \quad 0 \right]^T \tag{VII-58}$$

$$\delta_{k+1,b} = \delta_{k,b}^* = \delta_k^* \tag{VII-59}$$

Cabe verificar se esta solução proposta é uma solução viável. Reescrevendo as restrições **(VII-28)** e **(VII-29)** para o instante analisado:

$$V_1^{is} z^{is}(k+1+n|k+1) + V_1^i z^i(k+1+n|k+1) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{VII-60}$$

$$V_1^{is} z^i(k+1+n|k+1) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \tag{VII-61}$$

Não ocorrendo perturbações, pode-se afirmar que **(VII-47)**, mostrada anteriormente, e **(VII-62)**, mostrada a seguir, são verdadeiras.

$$z^{is}(k+1+n|k+1) = z^{is}(k+n+2|k) \tag{VII-62}$$

Utilizando **(VII-49)** e **(VII-50)**, a predição para este modo associado às variáveis integradoras do modelo escrito na forma incremental, pode ser escrita como:

$$z^{is}(k+n+2|k) = z^{is}(k+n+1|k) + z^i(k+n+1|k) \tag{VII-63}$$

$$z^{is}(k+n+2|k) = z^{is}(k+n|k) + z^i(k+n|k) + z^i(k+n|k) \tag{VII-64}$$

$$z^{is}(k+n+2|k) = z^{is}(k+n|k) + 2z^i(k+n|k) \tag{VII-65}$$

Desta forma, **(VII-60)** pode ser escrita como:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n+2|k) + V_1^i z^i (k+n+2|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{VII-66})$$

Substituindo (VII-65) e (VII-50) em (VII-66), vem:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n|k) + 2V_1^{is} z^i (k+n|k) + V_1^i z^i (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{VII-67})$$

Comparando a equação (VII-53) e (VII-67), pode-se concluir que esta solução proposta só é viável quando:

$$V_1^{is} z^i (k+n|k) = 0 \quad (\text{VII-68})$$

Em outras palavras, conforme (VII-54) e (VII-61), a solução proposta só tem viabilidade garantida quando a variável de decisão do problema A,  $\delta_{k,a}^{i*}$ , for nula. E como mostrado em (VII-51), o problema A converge em um número finito de iterações. Logo, depois deste número finito de iterações, que aqui será assumido que foi no instante  $k$ , a solução proposta é viável e a função objetivo para esta solução será:

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \\ & \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \\ & \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad (\text{VII-69})$$

A expressão indicada em (VII-69), pressupõe, para efeitos desta demonstração, a existência de um tempo em infinito mais um.

Substituindo (VII-57) em (VII-69), vem:

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \\ & \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \\ & + \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \end{aligned} \quad (\text{VII-70})$$

Na equação (VII-70), o termo em infinito já pressupõe que a folga dos polos integradores do processo,  $\delta_{\infty+1}^i$ , é nula, pois o problema A já teria convergido.

Ainda na equação indicada em (VII-70), o termo em infinito é nulo, conforme demonstração a seguir:

$$\begin{aligned} & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] = \\ & \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \end{aligned} \quad (\text{VII-71})$$

$$\begin{aligned} x_y(k+\infty+1|k) &= Vz(k+\infty+1|k) = VA_d^{\infty+1} z(k+n|k) \\ x_y(k+\infty+1|k) &= \begin{bmatrix} V^{is} & V^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & (\infty+1)I_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \\ x_y(k+\infty+1|k) &= \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is}(k+n|k) + (\infty+1)z^i(k+n|k) \\ z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \\ x_y(k+\infty+1|k) &= \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^{is}(\infty+1)z^i(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^{is}(\infty+1)z^i(k+n|k) + V_2^i z^i(k+n|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VII-72})$$

Pela equação (VII-61),  $\delta_{k,a}^{i*}$  será nulo neste instante e:

$$V_1^{is} z^i(k+1+n|k+1) = 0 \quad (\text{VII-73})$$

Como está sendo suposto que não há alteração na trajetória das variáveis integradoras, pode-se afirmar que:

$$z^i(k+1+n|k+1) = z^i(k+n+2|k) \quad (\text{VII-74})$$

Pela equação (VII-50) e (VII-68), é possível concluir que:

$$\begin{aligned} z^i(k+1+n|k+1) &= z^i(k+n+2|k) = z^i(k+n|k) = 0 \\ x_y(k+\infty+1|k) &= \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VII-75})$$

$$\begin{aligned} & \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] = \\ & \left[ \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\ & \left[ \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k^* \right] \end{aligned} \quad (\text{VII-76})$$

$$\begin{aligned} & \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \\ & = \left[ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \end{aligned} \quad (\text{VII-77})$$

A expressão indicada em (VII-77) é nula, pois satisfaz a restrição (VII-28).

Portanto, o termo em infinito em **(VII-70)** é nulo, e a expressão para a função objetivo neste instante fica:

$$J_{k+1} = J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) \quad \text{(VII-78)}$$

Como  $Q$  e  $R$  são positivos, pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} \leq J_k^* \quad \text{(VII-79)}$$

A solução ótima para o problema **(V-57)** será menor ou igual a solução viável. Portanto:

$$J_{k+1}^* \leq J_{k+1} \leq J_k^* \quad \text{(VII-80)}$$

A relação indicada em **(V-101)** mostra que a função objetivo  $J_k$  é uma função decrescente e o sistema **(IV-21)** é assintoticamente estável, segundo Lyapunov.

## VII.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Retornando à coluna do item V.7, o IHMPC proposto neste capítulo vai considerar agora a parte integradora do processo, variável indicada por  $y_1$  (m), que corresponde ao nível do vaso de topo da coluna. As variáveis manipuladas serão a vazão de vapor para o refeedor ( $u_1$ , ton/h), a vazão de refluxo de topo ( $u_2$ , m<sup>3</sup>/dia) e o desvio de temperatura de carga em relação ao estado estacionário ( $u_3$ , °C).

$$y_1(s) = \frac{2,3}{s} u_1(s) - \frac{0,7 \times 10^{-3}}{s} u_2(s) + \frac{0,2}{s} u_3(s) \quad \text{(VII-81)}$$

A Tabela VII-1 mostra os parâmetros que foram adotados pelo controlador, onde o período  $T$  de amostragem continua sendo igual a uma unidade de tempo.

Foi simulada uma situação de degrau no *set point* de -1 no instante  $k=10$ . A Figura VII-1 mostra a trajetória do nível ao longo do horizonte de predição. A Figura VII-2 mostra o comportamento das entradas e a Figura VII-3 a função de custo do problema de otimização.

**Tabela VII-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para um processo integrador puro**

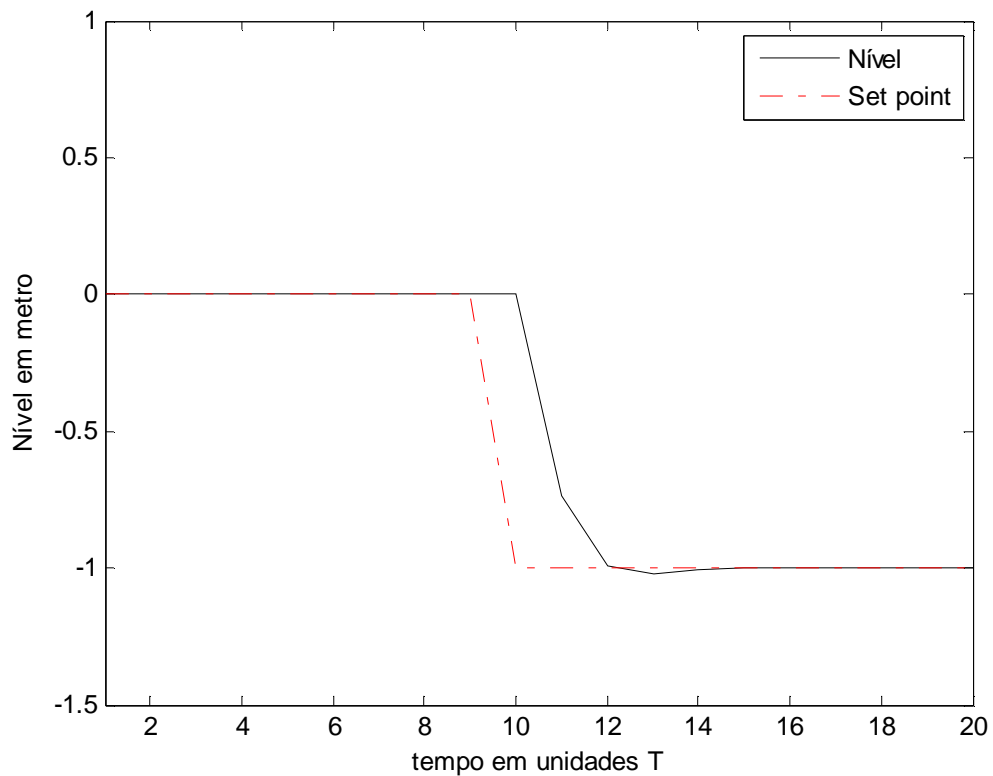
Descrição	Simbologia	Valor
Horizonte de controle	$m$	3
Horizonte de controle estendido	$n$	3
Peso das variáveis controladas	$Q$	1
Fator de supressão	$R$	[1 1 1]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S_1$	[10000000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do processo	$S_2$	[10000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[100 100 100]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-100 -100 -100]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[10,2 10,2 10,2]

A equação **(VII-82)** mostra o mesmo modelo, considerando a existência de tempo morto no processo. Observe que o controlador proposto neste trabalho, diferente do controlador com modelo OPOM apresentado por RODRIGUES (2001), continua observável e controlável para o caso em que o sistema tem saídas integradoras com tempos mortos diferentes para as diferentes entradas. Para este modelo, o horizonte de controle estendido  $n$ , passa para o valor de 7.

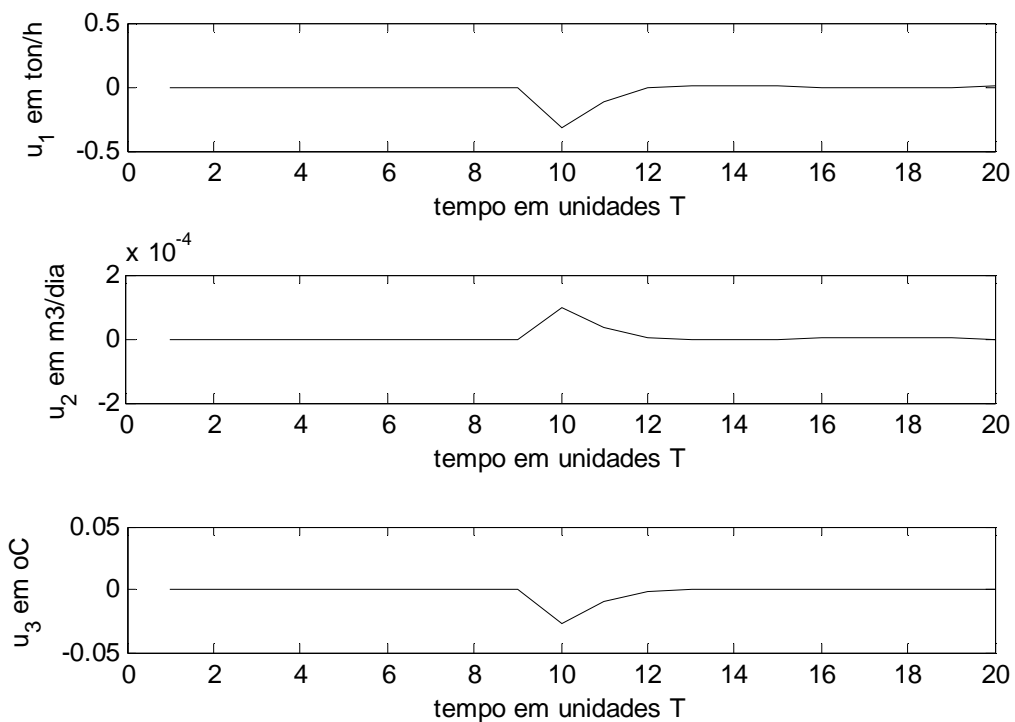
$$y_1(s) = \frac{2,3}{s} e^{-3s} u_1(s) - \frac{0,7 \times 10^{-3}}{s} e^{-2s} u_2(s) + \frac{0,2}{s} e^{-4s} u_3(s) \quad \text{(VII-82)}$$

Os resultados obtidos estão indicados na Figura VII-4, Figura VII-5 e Figura VII-6, repetindo a simulação anterior. Como esperado, o tempo morto é uma limitação para o

controle, tornando mais lenta a atuação do controle sobre a variável controlada.

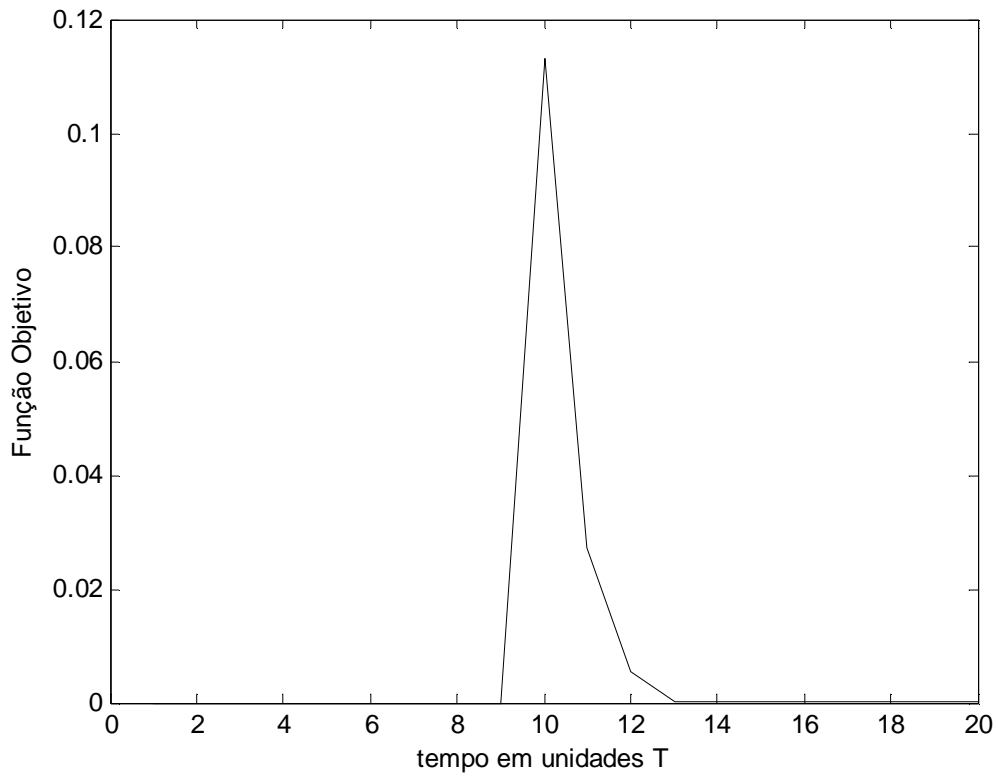


**Figura VII-1– Resposta da saída a um degrau unitário em -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro**

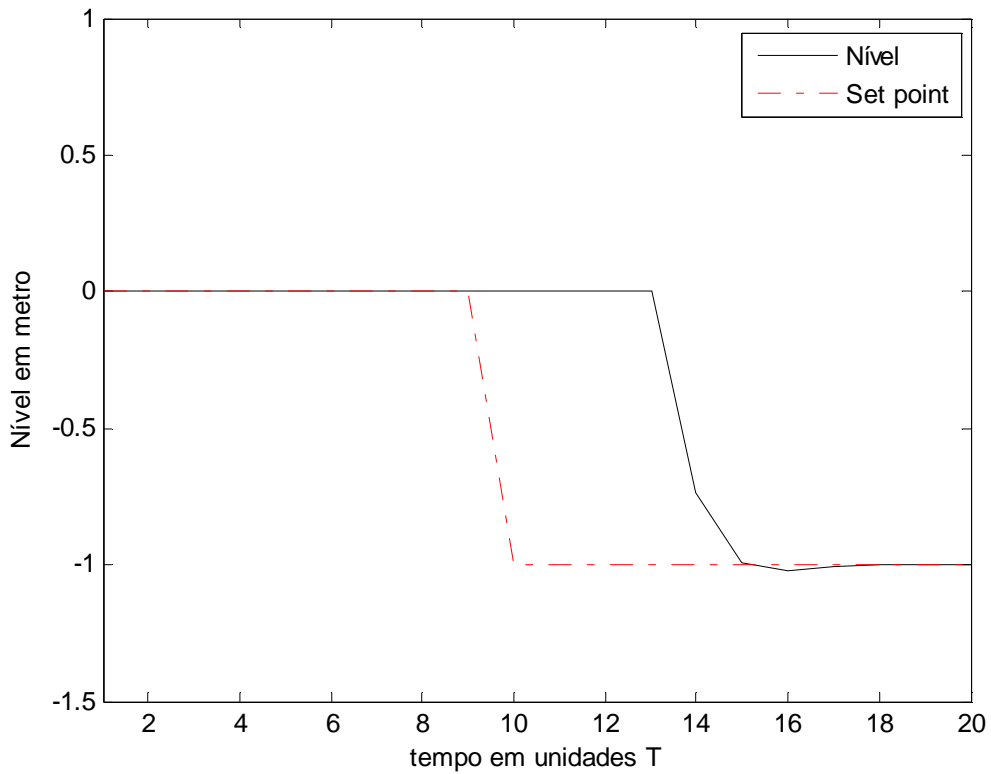


**Figura VII-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário de -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro**

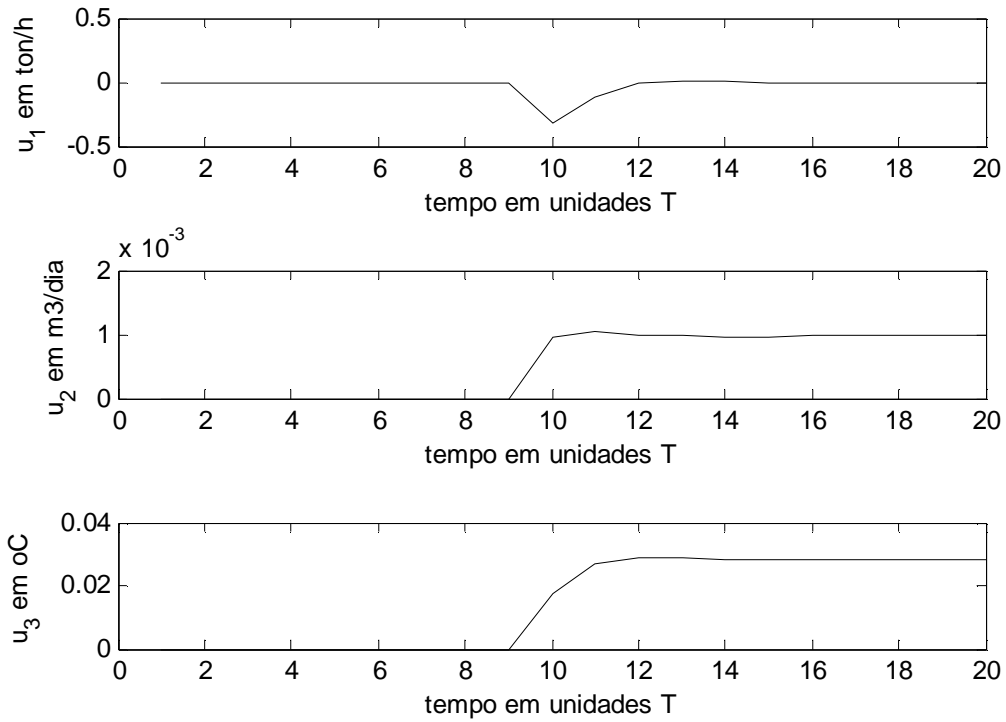




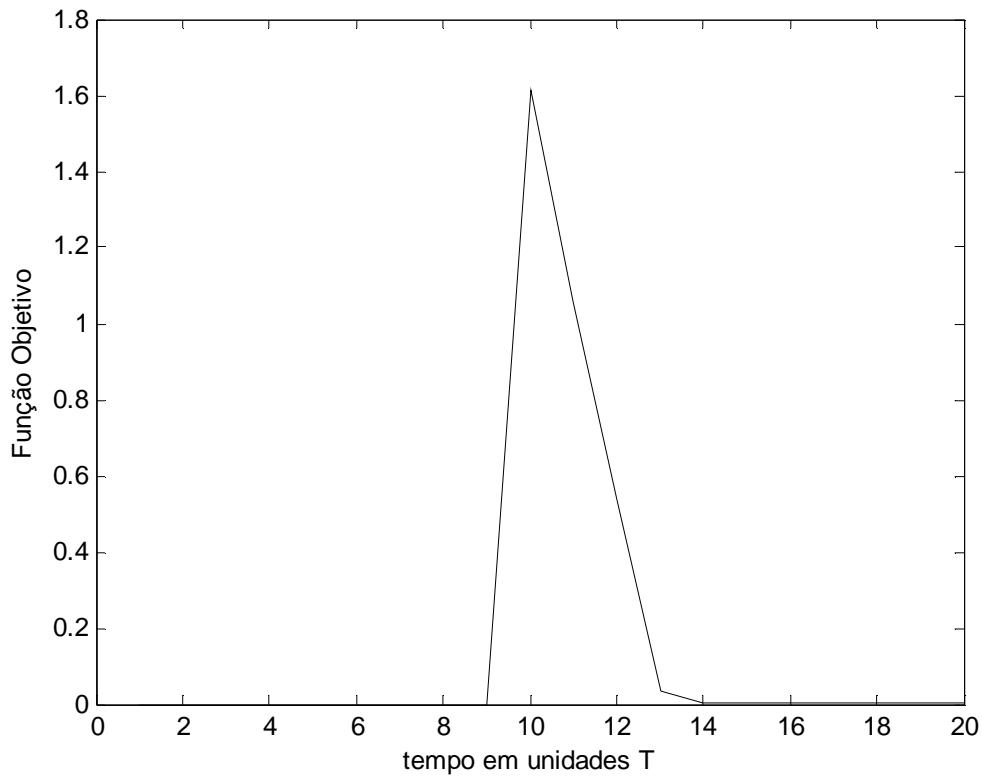
**Figura VII-3– Comportamento da função objetivo do problema B frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta integrador puro**



**Figura VII-4– Resposta da saída a um degrau unitário em -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro com tempo morto**



**Figura VII-5– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário de -1 no set point do IHMPC - caso planta integrador puro com tempo morto**



**Figura VII-6– Comportamento da função objetivo do problema B frente a um degrau unitário no set point do IHMPC - caso planta integrador puro com tempo morto**

## VIII. IHMPC COM FEEDBACK DE SAÍDA ESTENDIDO A PROCESSOS COM POLOS INTEGRADORES E POLOS ESTÁVEIS

---

### VIII.1. INTRODUÇÃO

Uma unidade industrial normalmente é caracterizada pela presença de polos estáveis e de polos integradores no modelo das variáveis selecionadas para controle pelo MPC.

Neste capítulo será apresentado um controlador preditivo para um sistema com polos estáveis e polos integradores, considerando apenas o caso nominal. O controlador preditivo multivariável proposto será obtido a partir da combinação dos controladores apresentados nos capítulos V e VII.

### VIII.2. MODELO DE PROCESSO CONSIDERADO PELO IHMPC

O controlador tratará separadamente os modelos instáveis e estáveis do processo, considerando que o conjunto de ações a serem aplicadas a este processo é único.

Desta forma, pode-se apresentar como modelos ao controlador o sistema indicado em **(IV-21)**, rerepresentado em **(VIII-1)** separando a parte integradora da parte estável:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_y(k+1|k) \\ x_{\Delta u}(k+1|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C_y & C_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y(k|k) \\ x_{\Delta u}(k|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{(VIII-1)}$$

$A_y$  - Componente da matriz de estados que modifica as saídas integradoras do processo,  $A_y \in \mathbb{R}^{2n_y \times 2n_y}$ ,  $A_y = \begin{bmatrix} 2I_{n_y} & -I_{n_y} \\ I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}$

$A_{\Delta u}$  - Componente da matriz de estados que modifica as entradas do processo,

$$A_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{2n_y \times (nb-1) \cdot nu}, A_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_2 & \cdots & B_{nb} \\ 0 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_2, \dots, B_{nb} \in \mathbb{R}^{n_y \times nu}$$

- $\underline{0}$  - Matriz de zeros,  
 $\underline{0} \in \mathbb{R}^{((nb-1).nu \times 2ny)}$
- $\underline{I}$  - Matriz de deslocamento das ações de controle,  
 $\underline{I} \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu \times (nb-1).nu}$
- $B_{\Delta u}$  - Componente da matriz de entrada que modifica as entradas aplicadas ao processo,  $B_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{2ny \times nu}$ ,  $B_{\Delta u} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$
- $\bar{I}$  - Componente de deslocamento a última ação de controle calculada para compor o próximo estado,  $\bar{I} \in \mathbb{R}^{((nb-1).nu) \times nu}$
- $C_y$  - Componente da matriz de saídas que recupera a partir do estado atual as saídas de interesse do processo,  
 $C_y \in \mathbb{R}^{ny \times 2ny}$ ,  $C_y = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix}$
- $C_{\Delta u}$  - Componente da matriz de saídas que compõe a saída atual a partir da parte de entradas passadas do estado atual,  
 $C_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{ny \times (nb-1).nu}$ ,  $C_{\Delta u} = [0 \ \dots \ 0]$
- $x_y(k)$  - Parcela do estado referente às saídas no instante  $k$ ,  
 $x_y(k) \in \mathbb{R}^{2ny \times 1}$
- $x_{\Delta u}(k)$  - Parcela do estado referente às entradas no instante  $k$ ,  
 $x_{\Delta u}(k) \in \mathbb{R}^{(nb-1).nu \times 1}$

$$\begin{bmatrix} x_{y,s}(k+1|k) \\ x_{\Delta u,s}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{y,s} & A_{\Delta u,s} \\ \underline{0} & \underline{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{y,s}(k|k) \\ x_{\Delta u,s}(k|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u,s} \\ \bar{I}_s \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

(VIII-2)

$$y_s(k) = \begin{bmatrix} C_{y,s} & C_{\Delta u,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{y,s}(k|k) \\ x_{\Delta u,s}(k|k) \end{bmatrix}$$

- $A_{y,s}$  - Componente da matriz de estados que modifica as saídas estáveis do processo,  $A_{y,s} \in \mathbb{R}^{(na_{-s+1}).ny_{-s}}$
- $A_{\Delta u,s}$  - Componente da matriz de estados dos modelos estáveis que modifica as entradas do processo,  $A_{\Delta u,s} \in \mathbb{R}^{(na_{-s+1}).ny_{-s} \times (nb_{-s-1}).nu}$
- $\underline{0}$  - Matriz de zeros,  
 $\underline{0} \in \mathbb{R}^{((nb_{-s-1}).nu \times (na_{-s+1}).ny_{-s})}$
- $\underline{I}_s$  - Matriz de deslocamento das ações de controle,  $\underline{I}_s \in \mathbb{R}^{(nb_{-s-1}).nu}$
- $B_{\Delta u,s}$  - Componente da matriz de entrada dos modelos estáveis que modifica as entradas aplicadas ao processo,  
 $B_{\Delta u,s} \in \mathbb{R}^{((na_{-s+1}).ny_{-s}) \times nu}$
- $\bar{I}_s$  - Componente de deslocamento a última ação de controle calculada para compor o próximo estado,  $\bar{I}_s \in \mathbb{R}^{((nb_{-s-1}).nu) \times nu}$
- $C_{y,s}$  - Componente da matriz de saídas que recupera a partir do estado atual as saídas de interesse do processo,  
 $C_{y,s} \in \mathbb{R}^{ny_{-s} \times na_{-s}.ny_{-s}}$
- $C_{\Delta u,s}$  - Componente da matriz de saídas que compõe a saída atual a

partir da parte de entradas passados do estado atual,

$$C_{\Delta u,s} \in \mathbb{R}^{(ny-s)(nb-s-1),nu}$$

- $x_{y,s}$  - Parcela do estado referente às saídas estáveis no instante  $k$ ,  
 $x_{y,s}(k) \in \mathbb{R}^{(na-s+1),ny-s \times 1}$
- $x_{\Delta u,s}$  - Parcela do estado referente às entradas no instante  $k$ ,  
 $x_{\Delta u,s}(k) \in \mathbb{R}^{(nb-s-1),nu \times 1}$

Aplicando-se a transformação da matriz de estados para o instante de tempo correspondente ao horizonte de controle estendido:

$$\begin{aligned} A_y &= VA_d V^{-1} \\ A_{y,s} &= V_s A_{d,s} V_s^{-1} \end{aligned} \quad \text{(VIII-3)}$$

$$\begin{aligned} A_d &- \begin{bmatrix} I_{ny} & I_{ny} \\ 0 & I_{ny} \end{bmatrix}, \text{ para as variáveis integradoras} \\ A_{d,s} &- \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st} \end{bmatrix}, \text{ para as variáveis estáveis} \end{aligned}$$

Após este intervalo de tempo, é possível também definir um novo espaço de estados:

$$\begin{aligned} x_y = Vz &= \begin{bmatrix} V^{is} & V^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is} \\ z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{is} & V_1^i \\ V_2^{is} & V_2^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{is} \\ z^i \end{bmatrix}, \quad z^{is}, z^i \in \mathbb{R}^{ny} \\ x_{y,s} = V_s z &= \begin{bmatrix} V_s^i & V_s^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s^i \\ z_s^{st} \end{bmatrix}, \quad V_s^{st}, z_s^{st} \in \mathbb{R}^{nst} \quad V_s^i, z_s^i \in \mathbb{R}^{ny-s} \end{aligned} \quad \text{(VIII-4)}$$

- $nst$  - Número de polos estáveis do processo
- $V^{is}, V_s^i$  - Autovetor associado aos polos integradores que surgem no modelo incremental
- $V^i$  - Autovetor associado aos polos integradores do processo
- $V_s^{st}$  - Autovetor associado aos polos estáveis do processo
- $V_1^{is}, V_1^i, V_2^{is}, V_2^i$  - Autovetor associado aos polos integradores do processo,  $\in \mathbb{R}^{ny}$

### VIII.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC

A função objetivo proposta será similar às funções apresentadas anteriormente. Esta função fará, de forma separada, a predição para as saídas integradoras da predição para as saídas estáveis do processo.

$$\begin{aligned}
J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_{k,s}, \delta_k^i) &= \sum_{j=1}^n [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q \\
&+ [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i] + \sum_{j=n+1}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q \\
&+ [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i] + \\
&\sum_{j=1}^{n-s} [Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}]^T Q_s [Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}] + \\
&\sum_{j=n-s+1}^{\infty} [Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}]^T Q_s [Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}] + \\
&\sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k)^T R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_{k,s}^T S_{1,s} \delta_{k,s} + \delta_k^{iT} S_2 \delta_k^i
\end{aligned} \tag{VIII-5}$$

- $J_k$  - Função de custo para o instante  $k$   
 $x(k+j|k)$  - Predição para o estado integrador feita instante  $k$  para o instante  $k+j$   
 $x_s(k+j|k)$  - Predição para o estado estável feita instante  $k$  para o instante  $k+j$   
 $\Delta u(k+j|k)$  - Predição para a saída feita instante  $k$  para o instante  $k+j$   
 $Q$  - Matriz de peso das variáveis controladas integradoras,  $Q \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$   
 $Q_s$  - Matriz de peso das variáveis controladas com modelo estável,  $Q_s \in \mathbb{R}^{ny-s \times ny-s}$   
 $R$  - Matriz de supressão das variáveis manipuladas,  $R \in \mathbb{R}^{nu \times nu}$   
 $S_1$  - Matriz para penalização das folgas associadas aos polos integradores do modelo incremental na parte não estável do processo,  $\delta_k, S_1 \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$   
 $S_{1,s}$  - Matriz para penalização das folgas associadas aos polos integradores do modelo incremental na parte estável do processo,  $\delta_{k,s}, S_{1,s} \in \mathbb{R}^{ny-s \times ny-s}$   
 $\delta_k$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador do modelo incremental da parte não estável do processo,  $\delta_k \in \mathbb{R}^{ny}$   
 $\delta_{k,s}$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador do modelo incremental da parte estável do processo,  $\delta_{k,s} \in \mathbb{R}^{ny-s}$   
 $S_2$  - Matriz para penalização das folgas associada a  $\delta_k^i$ ,  $S \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$   
 $\delta_k^i$  - Vetor de folgas de cada pólo integrador do processo,  $\delta_k^i \in \mathbb{R}^{ny}$   
 $y^{sp}$  - Set point para as variáveis integradoras do processo,  $y^{sp} \in \mathbb{R}^{ny}$   
 $y_s^{sp}$  - Set point para as variáveis estáveis do processo,  $y_s^{sp} \in \mathbb{R}^{ny-s}$   
 $n$  - Horizonte de controle estendido para o modelo integrador,  $n = m + nb - 1$   
 $n-s$  - Horizonte de controle estendido para o modelo estável,  $n-s = m + nb-s - 1$

A primeira soma limitada indicada em **(VIII-5)** corresponde às saídas integradoras. Esta soma é calculada pela equação indicada em **(III-73)**. Desta forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i \right] = \\ & = \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right]^T \bar{Q} \end{aligned} \quad \text{(VIII-6)}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{ny} & - \begin{bmatrix} I_{ny} \\ \vdots \\ I_{ny} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times ny} \\ \tilde{I}_{ny} & - \begin{bmatrix} I_{ny} \\ 2I_{ny} \\ \vdots \\ nI_{ny} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_{ny} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times ny} \\ \Psi & - \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^m \\ CA^{m+1} \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} \\ \Theta & - \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{m-1}B & CA^{m-2}B & \dots & CB \\ CA^m B & CA^{m-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & \dots & CA^{n-m}B \end{bmatrix} \\ \bar{Q} & - \begin{bmatrix} Q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Q \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} \in \mathbb{R}^{(n.ny) \times (n.ny)} \end{aligned}$$

A segunda parcela que representa a soma infinita do modelo integrador deve ser anulada impondo as restrições indicadas em **(VII-35)** e **(VII-37)**, reescritas a seguir:

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad \text{(VII-35)}$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0 \quad (\text{VII-37})$$

A terceira soma indicada em (VIII-5) corresponde à soma finita feita para as variáveis de saída estáveis do processo. Utilizando, a equação (V-78), vem:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-s} \left[ C_s x_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s} \right]^T Q_s \left[ C_s x_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s} \right] = \\ & = \left[ \Psi_s x_s(k) + \Theta_s \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny-s} \delta_{k,s} \right]^T \bar{Q}_s \\ & \quad \left[ \Psi_s x_s(k) + \Theta_s \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny-s} \delta_{k,s} \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII-7})$$

$n-s$  - Horizonte de controle estendido para os modelos estáveis das variáveis de saída

$$\bar{Q}_s - \begin{bmatrix} Q_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_s \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_s \in \mathbb{R}^{(n-s.ny-s) \times (n-s.ny-s)}$$

$$\bar{I}_{ny-s} - \begin{bmatrix} I_{ny-s} \\ \vdots \\ I_{ny-s} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{ny-s} \in \mathbb{R}^{(n-s.ny-s) \times ny-s}$$

$$\Psi_s - \begin{bmatrix} C_s A_s \\ C_s A_s^2 \\ \vdots \\ C_s A_s^m \\ C_s A_s^{m+1} \\ \vdots \\ C_s A_s^{n-s} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_s - \begin{bmatrix} C_s B_s & 0 & \cdots & 0 \\ C_s A_s B_s & C_s B_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_s A_s^{m-1} B_s & C_s A_s^{m-2} B_s & \cdots & C_s B_s \\ C_s A_s^m B_s & C_s A_s^{m-1} B_s & \cdots & C_s A_s B_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_s A_s^{n-s-1} B_s & C_s A_s^{n-s-2} B_s & \cdots & C_s A_s^{n-s-m} B_s \end{bmatrix}$$

A quarta soma indicada em (VIII-5) corresponde à soma infinita da parte estável. Para evitar que a soma não tenha limites, será necessário impor a restrição indicada em (V-69), a seguir reescrita para a notação adotada neste capítulo.



$$C_{y,s} V_s^i N_{1s} V_s^{-1} N_s \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right] - y_s^{sp} - \delta_{k,s} = 0 \quad (\text{V-69})$$

O restante da soma, com a exclusão dos polos integradores do modelo incremental, reduz-se a uma função de Lyapunov, dada pela equação **(V-75)**.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C x_s(k+n+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s} \right]^T Q_s \left[ C x_s(k+n+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s} \right] \\ &= \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right]^T \tilde{Q}_s \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right] \\ \tilde{Q}_s & - N_s^T V_s^{-1T} N_{2s}^T P_s N_{2s} V_s^{-1} N_s \\ P_s & - \left[ F^{st} \right]^T P_s \left[ F^{st} \right] + \left[ F^{st} \right]^T V_s^{stT} C_{y,s}^T Q_s C_{y,s} V_s^{st} \left[ F^{st} \right] \\ B_{m,s} & - \left[ A_s^{n-s-1} B_s \quad A_s^{n-s-2} B_s \quad \dots \quad A_s^{n-s-m} B_s \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII-8})$$

Desta forma, a função objetivo para o problema envolvendo um processo que tenha polos estáveis e polos integradores fica:

$$\begin{aligned} J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_{k,s}, \delta_k^i) &= \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right]^T \bar{Q} \\ & \quad \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right] \\ & + \left[ \Psi_s x_s(k) + \Theta_s \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny_s} \delta_{k,s} \right]^T \bar{Q}_s \\ & \quad \left[ \Psi_s x_s(k) + \Theta_s \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny_s} \delta_{k,s} \right] + \\ & \quad \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right]^T \tilde{Q}_s \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right] + \\ & \quad \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k)^T R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_{k,s}^T S_{1,s} \delta_{k,s} + \delta_k^{iT} S_2 \delta_k^i \end{aligned} \quad (\text{VIII-9})$$

Transformando a função objetivo, indicada em **(VIII-9)**, na forma compatível à programação quadrática, vem:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k, \delta_{k,s}, \delta_k^i} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T & \delta_k^{iT} & \delta_{k,s}^T \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + c \quad (\text{VIII-10})$$

s.a.

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0$$

$$C_{y,s} V_s^i N_{1s} V_s^{-1} N_s \left[ A_s^{n-s} x_s(k|k) + B_{m,s} \Delta u_k \right] - y_s^{sp} - \delta_{k,s} = 0$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

$$u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max}$$

$$H \quad - \quad \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 \\ H_{41} & 0 & 0 & H_{44} \end{bmatrix}$$

$$H_{11} \quad - \quad \Theta^T \bar{Q} \Theta + \Theta_s^T \bar{Q}_s \Theta_s + B_{m,s}^T \tilde{Q}_s B_{m,s} + \bar{R}$$

$$H_{12} \quad - \quad -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny}$$

$$H_{13} \quad - \quad -\Theta^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny}$$

$$H_{14} \quad - \quad -\Theta_s^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s}$$

$$H_{21} \quad - \quad -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta$$

$$H_{22} \quad - \quad \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S_1$$

$$H_{23} \quad - \quad \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny}$$

$$H_{31} \quad - \quad -\tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta$$

$$H_{32} \quad - \quad \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny}$$

$$H_{33} \quad - \quad \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} + S_2$$

$$H_{41} \quad - \quad -\bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \Theta_s$$

$$H_{44} \quad - \quad \bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} + S_{1,s}$$

$$C_f^T \quad - \quad \begin{bmatrix} c_{f1} \\ -x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} + \bar{y}^{spT} \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\ -x_s^T(k|k) \Psi_s^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} + \bar{y}_s^{spT} \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \end{bmatrix}^T$$

$$c_{f1} \quad - \quad x_s^T(k|k) A_s^{n-sT} \tilde{Q}_s B_{m,s} + x_s^T(k|k) \Psi_s^T \bar{Q}_s \Theta_s - \bar{y}_s^{spT} \bar{Q}_s \Theta_s +$$

$$x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \Theta - \bar{y}^{spT} \bar{Q} \Theta$$

$$x_s^T(k|k) A_s^{n-sT} \tilde{Q}_s A_s^{n-s} x_s(k|k) +$$

$$c \quad - \quad \left[ \Psi x(k|k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k|k) - \bar{y}^{sp} \right] +$$

$$\left[ \Psi_s x_s(k|k) - \bar{y}_s^{sp} \right]^T \bar{Q}_s \left[ \Psi_s x_s(k|k) - \bar{y}_s^{sp} \right]$$

## VIII.4. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO CONSIDERADO PELO IHMPC NOMINAL ESTÁVEL E INTEGRADOR

O problema de otimização será composto por dois problemas, aqui definidos como problema A e problema B.

O primeiro problema, conforme descrito no sistema de integrador puro, vide capítulo VII, tem como finalidade minimizar a folgas associadas aos polos integradores que compõe o processo.

Problema A:

$$\min_{\Delta u_{k,j}, \delta_k^i} \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^i \quad (\text{VIII-11})$$

s.a.

$$\begin{aligned} V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i &= 0 \\ -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) &\leq \Delta u_{\max} \\ u_{\min} \leq u(k+j|k) &\leq u_{\max} \end{aligned}$$

O segundo problema será obtido a partir do desenvolvimento da função objetivo expressa em (VIII-9) na forma de uma QP. De forma análoga à manipulação algébrica feita para os casos de processo estável e do processo integrador puro, chega-se ao problema indicado em (VIII-12):

Problema B:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k, \delta_{k,s}} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T & \delta_{k,s}^T \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + c + c_s \quad (\text{VIII-12})$$

s.a.

$$\begin{aligned} [V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2] V^{-1} N A^n x(k|k) + [V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k &= 0 \\ V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i &= 0 \\ C_{y,s} V_s^i N_{1s} V_s^{-1} N_s A_s^{n-s} x_s(k|k) + C_{y,s} V_s^i N_{1s} V_s^{-1} N_s B_{m,s} \Delta u_k - y_s^{sp} - \delta_{k,s} &= 0 \\ \delta_k^i &= \delta_{k,a}^{i*} \\ -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) &\leq \Delta u_{\max} \\ u_{\min} \leq u(k+j|k) &\leq u_{\max} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
H \\
\bar{R} \\
C_f^T \\
c \\
c_s \\
\delta_{k,a}^{i*}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}
\Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} + B_{m,s}^T \bar{Q}_s B_{m,s} + \Theta_s^T \bar{Q}_s \Theta_s & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & -\Theta_s^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s} \\
-\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta & S_1 + \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & 0_{ny \times ny_s} \\
-\bar{I}_{ny,s}^T \bar{Q}_s \Theta_s & 0_{ny_s \times ny} & S_{1,s} + \bar{I}_{ny,s}^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s}
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
R & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & R
\end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{(m.nu) \times (m.nu)} \\
\begin{bmatrix}
\left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right)^T \bar{Q} \Theta + \left( \Psi_s x_s(k) - \bar{y}_s^{sp} \right)^T \bar{Q}_s \Theta_s + x_s^T(k) A_s^{n-s^T} \bar{Q}_s B_{m,s} \\
-\left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right)^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\
-\left( \Psi_s x_s(k) - \bar{y}_s^{sp} \right)^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s}
\end{bmatrix}^T \\
\left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right)^T \bar{Q} \left( \Psi_x(k) - \bar{y}^{sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*} \right) \\
x_s^T(k) A_s^{n-s^T} \bar{Q}_s A_s^{n-s} x_s(k) + \left( \Psi_s x_s(k) - \bar{y}_s^{sp} \right)^T \bar{Q}_s \left( \Psi_s x_s(k) - \bar{y}_s^{sp} \right) \\
- \text{ Solução óptima para as folgas dos polos integradores do processo encontrada no problema A}
\end{array}$$

O elemento de linha 2 e coluna 3 de  $H$  é nulo, tendo em vista que corresponde à influência da folga dos polos integradores do modelo incremental do processo estável no cálculo da folga do modelo incremental do processo integrador. O mesmo ocorre com o elemento de linha 3 coluna 2 em relação ao cálculo das folgas do modelo incremental do processo estável e a influência das folgas dos polos integradores do modelo incremental integrador.

## VIII.5. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHMPC APLICADO A PROCESSOS ESTÁVEIS CASO NOMINAL E INTEGRADORES

Seja  $[\Delta u^*(k|k) \quad \Delta u^*(k+1|k) \quad \cdots \quad \Delta u^*(k+m-1|k)]$ ,  $\delta_k^*$  e  $\delta_{k,s}^*$  a solução óptima no instante  $k$  do problema indicado em **(VIII-12)**, enquanto que  $\delta_{k,a}^{i*}$  foi a solução encontrada no problema **(VIII-11)** e  $J_k^*$  o valor ótimo de  $J_k$ .

O problema A tem sua demonstração de estabilidade similar ao problema do controlador integrador puro, tendo em vista que sua função objetivo e restrição são exatamente iguais e a solução inicial proposta  $\tilde{\Delta u}_{k+1,b}$  seria definida no problema B. Desta forma, no instante  $k$  tem-se uma solução óptima  $\delta_{k,a}^{i*}$  que satisfaz a restrição **(VII-29)**. No instante seguinte,  $k+1$ , esta solução, acompanhada da solução

apresentada pelo problema B na interação anterior e deslocada de uma ação de controle, tendo em vista que a primeira ação já foi aplicada ao processo e não precisa ser mais considerada pelo IHMPC, compõem uma solução viável para o problema A. A função objetivo ótima terá um valor menor ou igual a esta solução viável.

Para o problema B, aqui reescrito de uma forma mais adequada para o desenvolvimento da prova da estabilidade, tem-se:

$$\min_{\Delta u_{b,k}, \delta_k} J_k \quad \text{(VIII-13)}$$

s.a.

$$V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad \text{(VII-28)}$$

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(VII-29)}$$

$$C_{ys} V_s^i z_s^i(k+n|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s} = 0 \quad \text{(VIII-14)}$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

A função objetivo com os valores ótimos de  $\Delta u_{k,b}^*$ ,  $\delta_k^*$ ,  $\delta_{k,a}^{i*}$  e  $\delta_{k,s}^*$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} J_k^* &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad \text{(VIII-15)}$$

$$\begin{aligned} J_k^* &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\ &\left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\ &+ \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad \text{(VIII-16)}$$

Isolando, na equação (VIII-16), as expressões indicadas como somatório, visando uma futura substituição no momento de correlacionar o valor da função objetivo deste instante com o instante seguinte, vem:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) = J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\
& \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\
& - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* - \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*}
\end{aligned} \tag{VIII-17}$$

Ainda para este instante  $k$ , a solução ótima, obviamente, satisfaz as restrições do problema. Desta forma, pode-se concluir que as equações indicadas em (VIII-18), (VIII-19) e (VIII-20) são verdadeiras.

$$V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{VIII-18}$$

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^* = 0 \tag{VIII-19}$$

$$C_{ys} V_s^i z_s^i(k+n|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* = 0 \tag{VIII-20}$$

Se  $\Delta u^*(k|k)$  for aplicado aos sistemas indicados em (VIII-1) e (VIII-2) e não houver nenhum distúrbio, então, no instante  $k+1$  seguinte, a sequência indicada em (VIII-21), (VIII-22), (VIII-23) e (VIII-24) é uma solução possível para este instante.

$$\Delta \tilde{u}_{k+1,b} = \left[ \Delta u^*(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1|k)^T \quad 0 \right]^T \tag{VIII-21}$$

$$\delta_{k+1,b} = \delta_{k,b}^* = \delta_k^* \tag{VIII-22}$$

$$\delta_{k+1,a}^i = \delta_{k,a}^{i*} \tag{VIII-23}$$

$$\delta_{k+1,b,s} = \delta_{k,b,s}^* = \delta_{k,s}^* \tag{VIII-24}$$

Para que esta solução seja viável, deve satisfazer as restrições (VIII-18), (VIII-19) e (VIII-20).

$$V_1^{is} z^{is}(k+1+n|k+1) + V_1^i z^i(k+1+n|k+1) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{VIII-25}$$

$$V_1^{is} z^i(k+1+n|k+1) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \tag{VIII-26}$$

$$C_{ys} V_s^i z_s^i (k+1+n-s|k+1) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* = 0 \quad (\text{VIII-27})$$

Como, por hipótese, não ocorrem perturbações no sistema em questão, a estimativa do estado para o instante  $k+1+n$  feita no instante  $k+1$  será igual a estimativa feita para o instante  $k+n+2$  no instante  $k$ .

$$z^{is} (k+1+n|k+1) = z^{is} (k+n+2|k) \quad (\text{VIII-28})$$

$$z^i (k+1+n|k+1) = z^i (k+n+2|k) \quad (\text{VIII-29})$$

$$z_s^i (k+1+n-s|k+1) = z_s^i (k+n-s+2|k) \quad (\text{VIII-30})$$

Substituindo (VIII-28), (VIII-29) e (VIII-30) em (VIII-25), (VIII-26) e (VIII-27), tem-se:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n+2|k) + V_1^i z^i (k+n+2|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{VIII-31})$$

$$V_1^{is} z^i (k+n+2|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad (\text{VIII-32})$$

$$C_{ys} V_s^i z_s^i (k+n-s+2|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* = 0 \quad (\text{VIII-33})$$

A estimativa para o estado correspondente à parte integradora foi vista em (VII-65) e (VII-50), a seguir repetida, para facilidade do leitor.

$$z^{is} (k+n+2|k) = z^{is} (k+n|k) + 2z^i (k+n|k) \quad (\text{VII-65})$$

$$z^i (k+n+2|k) = z^i (k+n+1|k) = z^i (k+n|k) \quad (\text{VII-50})$$

A predição de estado para a parte estável foi apresentada em (V-91) e, a seguir, também reescrita:

$$z_s^i (k+n-s+2|k) = z_s^i (k+n-s+1|k) = z_s^i (k+n-s|k) \quad (\text{VIII-34})$$

Substituindo (VII-65) e (VII-50) em (VIII-31), (VII-50) em (VIII-32) e (VIII-34) em (VIII-33), vem:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n|k) + 2V_1^{is} z^i (k+n|k) + V_1^i z^i (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{VIII-35})$$

$$V_1^{is} z^i (k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad (\text{VIII-36})$$

$$C_{ys} V_s^i z_s^i (k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* = 0 \quad (\text{VIII-37})$$

Comparando (VIII-36) com (VIII-19) e (VIII-37) com (VIII-20) concluímos que estas restrições são satisfeitas. E a restrição (VIII-35) será atendida quando  $z^i(k+n|k)$  for nulo, ou seja, a folga do problema A for anulada. Portanto, após convergência do problema A, a solução proposta na iteração anterior é viável. Para esta solução, a função objetivo do problema B terá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad (\text{VIII-38})$$

Para fins de demonstração da estabilidade, pressupõe-se a existência de um termo em infinito mais um na expressão da função objetivo.

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} + \\ & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\ & \left[ Cx_s(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII-39})$$

Na equação indicada em (VIII-39),  $\delta_{k,a}^{i*}$  foi considerado nulo no termo em infinito mais um, tendo em vista que o problema A já teria convergido, anulando essa folga.

Conforme (V-98) e (VII-77), pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} V_1^{is} z^{is} (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* &= 0 \\ C_{ys} V_s^i z_s^i (k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII-40})$$

Desta forma, substituindo (VIII-17) em (VIII-38), com o uso de (VIII-40), que mostra que o termo em infinito mais um é nulo, vem:



$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= J_k^* - [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*]^T Q \\
& [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*] - [Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*]^T Q_s [Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*] \\
& - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* - \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \\
& + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^{*T} S_{1,s} \delta_{k,s}^* + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*}
\end{aligned} \tag{VIII-41}$$

$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= J_k^* - [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*]^T Q [Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^*] - \\
& [Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*]^T Q_s [Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*] - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k)
\end{aligned} \tag{VIII-42}$$

Como  $Q, Q_s$  e  $R$  são matrizes positivas pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} < J_k^* \tag{VIII-43}$$

Portanto, a solução ótima será ainda menor que a solução não ótima que, por sua vez, já é menor que a solução ótima do instante anterior.

## VIII.6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Retornando à coluna do item V.7, o IHMPC proposto neste capítulo vai considerar simultaneamente as duas variáveis do processo: a variável indicada por  $y_1$ , que corresponde ao nível do vaso de topo da coluna, e variável indicada por  $y_2$ , que corresponde a temperatura no prato de número 68. As variáveis manipuladas serão a vazão de vapor para o refeedor ( $u_1$ , ton/h), a vazão de refluxo de topo ( $u_2$ , m<sup>3</sup>/dia) e o desvio de temperatura de carga em relação ao estado estacionário ( $u_3$ , °C).

O modelo linearizado para as variáveis controladas da coluna em relação às variáveis manipuladas é:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} e^{-3s} & \frac{-0,7 \times 10^{-3}}{s} e^{-2s} & \frac{0,2}{s} e^{-4s} \\ \frac{4,7}{9,3s+1} e^{-7s} & \frac{1,4 \times 10^{-3}}{6,8s+1} e^{-2s} & \frac{0,4}{11,6s+1} e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \tag{VIII-44}$$

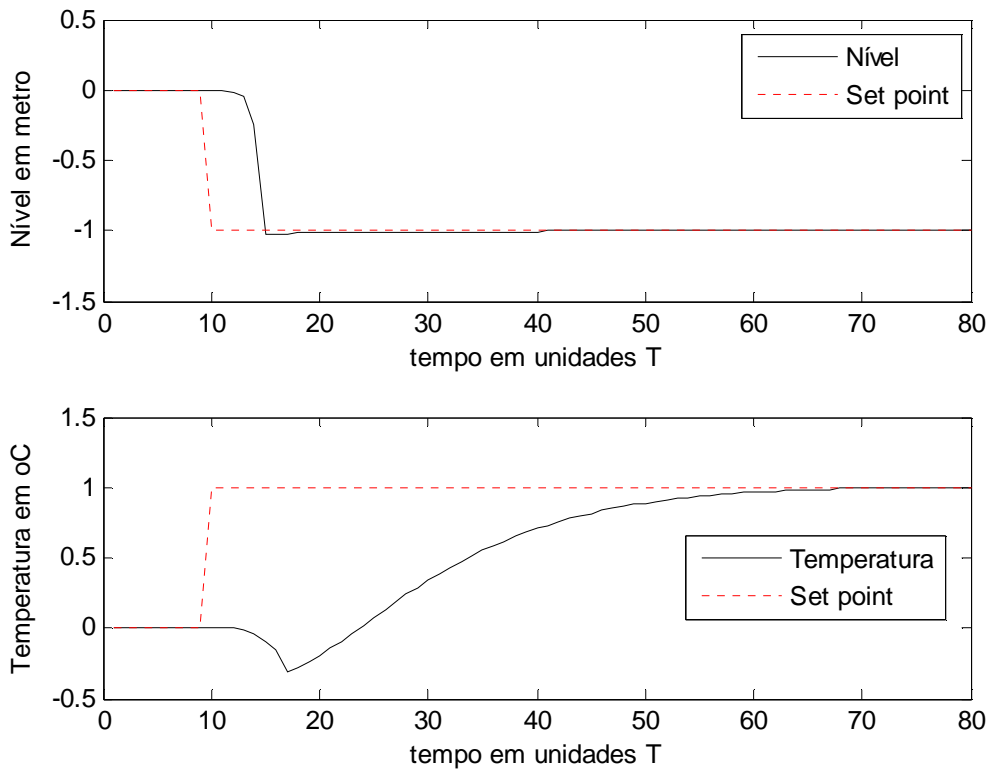
A sintonia proposta para o IHMPC é mostrada na Tabela VIII-1. O período de amostragem utilizado continua sendo de uma unidade de tempo.

Aplicando ao *set point* da variável temperatura um degrau unitário positivo e ao *set point* da variável nível um degrau unitário negativo, pode-se observar a resposta

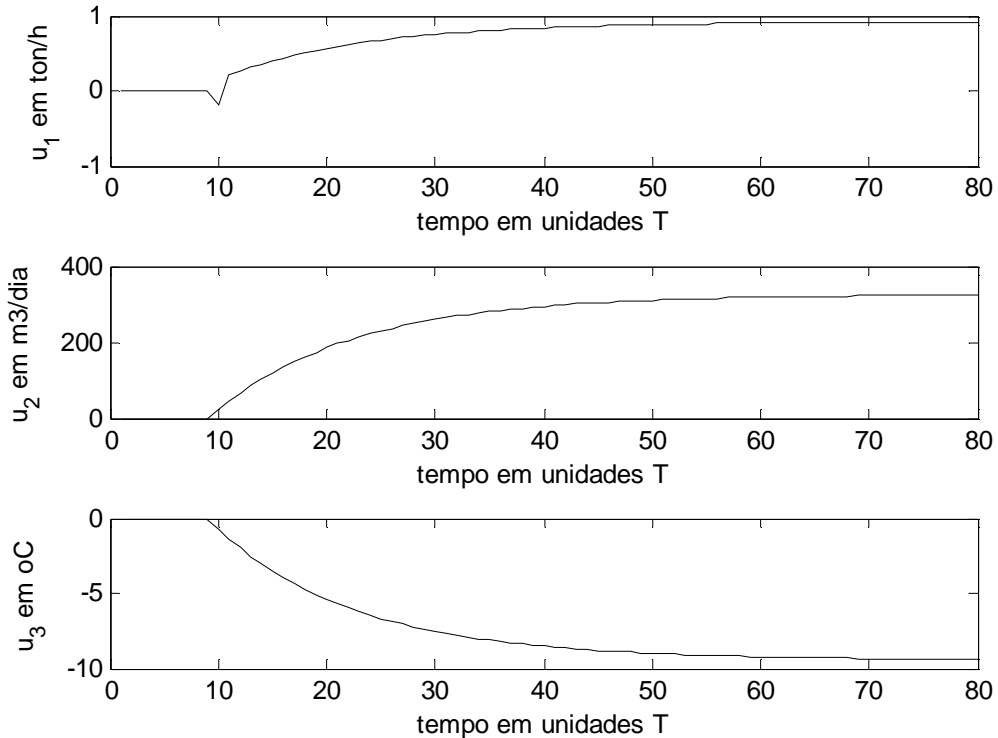
indicada na Figura VIII-1. A Figura VIII-2 mostra a ação do controlador sobre as variáveis manipuladas. A Figura VIII-3 mostra a função de custo do primeiro problema de otimização, o que minimiza a folga associada ao pólo integrador do processo, e a Figura VIII-4 a função de custo do segundo problema de otimização. As folgas associadas aos polos integradores do processo, sendo minimizadas pelo problema A, garantem a convergência do problema B. Pode-se perceber, também, pela resposta da malha fechada, a interação existente entre as variáveis controladas.

**Tabela VIII-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para o processo**

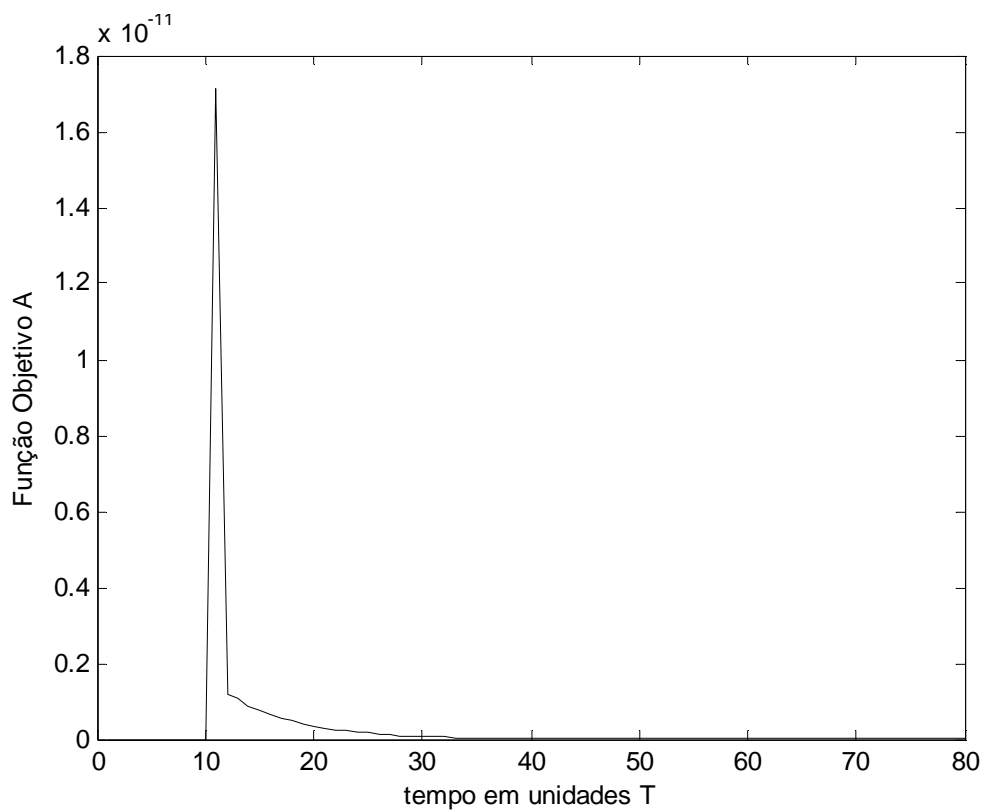
Descrição	Simbologia	Valor
Horizonte de controle	$m$	2
Horizonte de controle estendido	$n$	7
Horizonte de controle estendido modelo estável	$n_s$	11
Peso das variáveis controladas	$Q$	[1 1]
Fator de supressão	$R$	[0,1 0,1 10]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo integrador	$S_1$	[1000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do processo	$S_2$	[1000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo estável	$S_{1,s}$	[1000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[10 400 10]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-10 -400 -10]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[1 40 1]



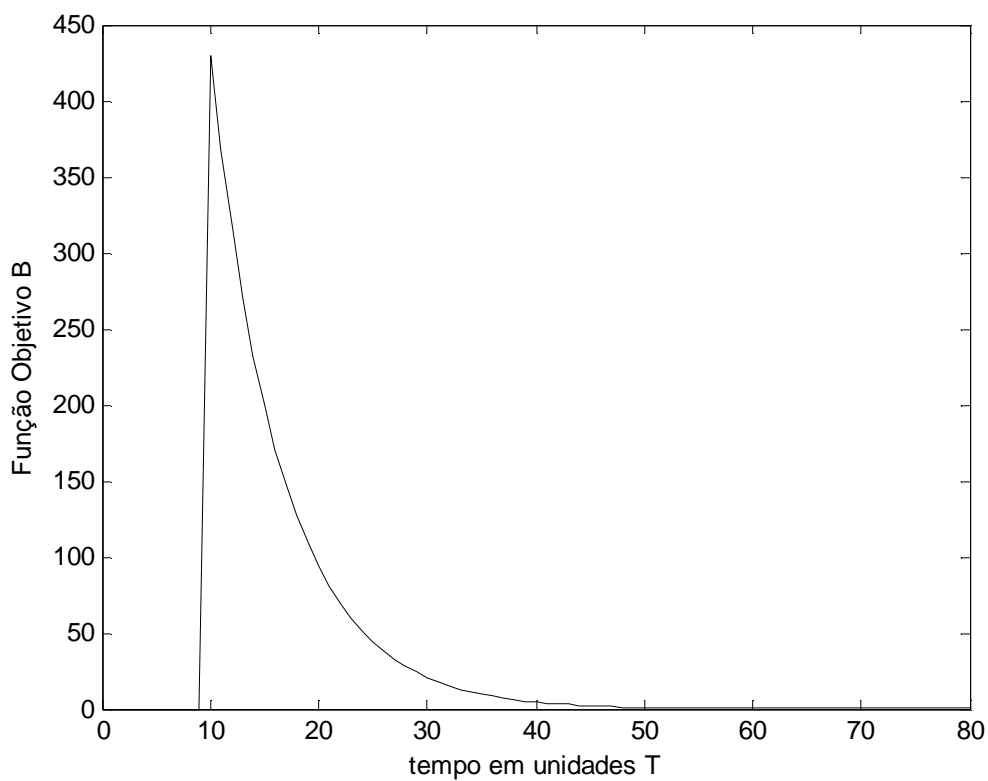
**Figura VIII-1– Resposta da saída a um degrau unitário nos set points do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores**



**Figura VIII-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo frente a um degrau unitário nos set points do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores**



**Figura VIII-3– Comportamento da função objetivo do problema A de otimização do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores**



**Figura VIII-4– Comportamento da função objetivo do problema B de otimização do IHMPC - caso planta com polos estáveis e polos integradores**

# IX. IHRMPC ROBUSTO COM FEEDBACK DE SAÍDA ESTENDIDO A PROCESSOS COM POLOS INTEGRADORES E POLOS ESTÁVEIS

---

## IX.1. INTRODUÇÃO

O controlador preditivo apresentado no capítulo VIII é um controlador que considera apenas o modelo nominal, mais provável, para a predição do estado do processo. Isto pode ser um problema em processos não lineares, ou processos que possam apresentar uma variação alta em seus modelos por conta de desgastes ou reatividade nas reações químicas.

Analogamente ao desenvolvido no capítulo VI, pode-se desenvolver um controlador preditivo multivariável robusto considerando a incerteza de modelo nas variáveis estáveis ou um sistema com variáveis estáveis do tipo multimodelo.

Uma extensão natural para os problemas A e B, apresentados no item VIII.4, seria a inclusão de diversos modelos possíveis para garantir a estabilidade do sistema na incerteza do modelo.

Para desenvolver um controlador MPC que seja robusto em relação às incertezas no modelo, tem-se que inicialmente admitir uma estrutura para essas incertezas. Uma forma usual de se caracterizar as incertezas é admitir que a matriz de estado  $A$  e a matriz de entrada  $B$  para a planta real não sejam exatamente conhecidas mas sabe-se que estão em um conjunto convexo definido por:

$$(A, B) = \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_i, B_i), \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, L \quad \text{(IX-1)}$$

onde  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , caracterizam um conjunto de modelos correspondentes a diferentes condições operacionais do processo. Por hipótese, todos esses modelos têm a mesma estrutura, ou seja, as matrizes  $A_i$  e  $B_i$  têm as mesmas dimensões para qualquer  $i$ .

Essa é a chamada incerteza politópica e tem sido adotada na maioria dos artigos que enfocam, via MPC, o controle robusto a incertezas no modelo.

Outra forma prática de se considerar incertezas no modelo, é definir um conjunto discreto de modelos  $\Omega$  onde:

$$(A, B) \in \Omega \mid \Omega = ((A_1, B_1), \dots, (A_L, B_L)) \quad \text{(IX-2)}$$

Nesse caso, a incerteza é dita multimodelos, pois a planta real é um dos modelos definidos em  $\Omega$ . É claro que a incerteza politópica é mais geral que a incerteza multimodelo. Assim, todas as conclusões válidas para a incerteza politópica serão também válidas para o caso multimodelos. No entanto, o modelo politópico só pode ser utilizado quando houver linearidade nas incertezas,  $A_i$  e  $B_i$ . Para formulações em que esse fato não ocorra, a incerteza se torna multimodelo.

Pode-se designar de nominal o modelo mais provável da planta ou aquele que corresponde às condições de projeto do processo.

Para cada modelo  $\theta_p$ , é possível realizar uma decomposição de Jordan, conforme foi visto em **(VI-3)**. Portanto:

$$A_y(\theta_p)V(\theta_p) = V(\theta_p)A_d(\theta_p) \quad \text{(IX-3)}$$

$$\begin{aligned} A_y(\theta_p) & \text{ - Matriz de estados associada às saídas do processo} \\ & \text{ - } A_y(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]} \\ V(\theta_p) & \text{ - Matriz de autovetores da matriz } A_y(\theta_p), \\ & \text{ - } V(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]} \\ A_d(\theta_p) & \text{ - Matriz diagonal de autovalores da matriz } A_y(\theta_p), \\ & \text{ - } A_d(\theta_p) \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]} \end{aligned}$$

Na equação **(IX-3)**,  $A_d(\theta_p)$  contém os autovalores integradores do modelo incremental e os autovalores estáveis para cada modelo levantado para o processo, conforme indicado em **(IX-8)**.

$$A_d(\theta_p) = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F_{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \quad \text{(IX-4)}$$

Os modelos a serem considerados serão os mesmos do capítulo VIII, onde a parte estável será tratada considerando um conjunto de modelos possíveis.

$$\begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k|k} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_y & C_{\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k|k}$$
(IX-5)

$$\begin{bmatrix} x_{y,s}(\theta_p) \\ x_{\Delta u,s}(\theta_p) \end{bmatrix}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} A_{y,s}(\theta_p) & A_{\Delta u,s}(\theta_p) \\ \underline{0} & \underline{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{y,s}(\theta_p) \\ x_{\Delta u,s}(\theta_p) \end{bmatrix}_{k|k} + \begin{bmatrix} B_{\Delta u,s}(\theta_p) \\ \underline{I}_s \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y_s(k) = \begin{bmatrix} C_{y_s} & C_{\Delta u_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{y,s}(\theta_p) \\ x_{\Delta u,s}(\theta_p) \end{bmatrix}_{k|k}$$
(IX-6)

## IX.2. FUNÇÃO OBJETIVO DO IHMPC ROBUSTO

Para garantir a convergência e estabilidade do sistema sem tornar o controlador muito conservativo, a função objetivo do problema de otimização da parte estável do processo irá ser calculada apenas para o modelo nominal e será acrescentada uma restrição que garanta, para cada modelo possível do conjunto  $\Omega$ , a contração da função objetivo.

A equação (IX-7) mostra esta função objetivo, com a separação da planta em duas parcelas, para efeitos de predição: a parte estável e a parte integradora.

$$J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_k^i, \delta_{k,s}(\theta_p)) = \sum_{j=1}^n [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q$$

$$+ [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-s} [Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p)]^T Q_s$$

$$+ [Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p)]^T Q_s$$

$$+ \sum_{j=n-s+1}^{\infty} [Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p)]^T Q_s [Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p)]^T Q_s$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k)^T R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_{k,s}^T(\theta_p) S_{1,s} \delta_{k,s}(\theta_p) + \delta_k^{i^T} S_2 \delta_k^i$$
(IX-7)

$\delta_k^i, \delta_k$  e  
 $\delta_{k,s}(\theta_p)$

São variáveis de folga que eliminam a inviabilidade das restrições associadas ao problema de otimização e tornam a solução do mesmo viável.

$S_1, S_{1,s}$  e  $S_2$  São matrizes simétricas positivas definidas que penalizam as variáveis de folgas e são parâmetros de sintonia do controlador.

$$x_{s,\theta p} - x_s(\theta p)$$

A soma limitada referente à parte integradora, indicada em **(IX-7)**, é calculada pela equação indicada em **(VII-38)**. Logo:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i] = \\ & = \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right]^T \bar{Q} \\ & \quad \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right] \end{aligned} \quad \text{(IX-8)}$$

A expressão indicada em **(IX-8)** pode ser desenvolvida, obtendo-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i]^T Q [Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k - j\delta_k^i] = \\ & = \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right] + 2 \left[ \Psi x(k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \Theta \Delta u_k \\ & + 2 \left[ -\Psi x(k) + \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \delta_k + 2 \left[ -\Psi x(k) + \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \\ & + \Delta u_k^T \left[ \Theta^T \bar{Q} \Theta \right] \Delta u_k + \Delta u_k^T \left[ -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \right] \delta_k + \Delta u_k^T \left[ -\Theta^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \right] \delta_k^i \\ & + \delta_k^T \left[ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \right] \Delta u_k + \delta_k^T \left[ \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \right] \delta_k + \delta_k^T \left[ \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \right] \delta_k^i \\ & + \delta_k^{iT} \left[ -\tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \right] \Delta u_k + \delta_k^{iT} \left[ \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \right] \delta_k + \delta_k^{iT} \left[ \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \right] \delta_k^i \end{aligned} \quad \text{(IX-9)}$$

A soma infinita do modelo integrador deve ser anulada impondo as restrições indicadas em **(VII-35)** e **(VII-37)**, reescritas a seguir:

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad \text{(VII-35)}$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0 \quad \text{(VII-37)}$$

A soma finita referente às variáveis de saída estáveis do processo pode ser calculada através da equação **(VI-15)**:



$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-s} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& = \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) + \Theta_s(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny-s} \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T \bar{Q}_s \\
& \quad \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) + \Theta_s(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny-s} \delta_{k,s}(\theta_p) \right]
\end{aligned} \tag{IX-10}$$

$$\begin{aligned}
n-s & - \text{Horizonte de controle estendido para os modelos estáveis das} \\
& \quad \text{variáveis de saída} \\
\bar{Q}_s & - \begin{bmatrix} Q_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_s \end{bmatrix}, \bar{Q}_s \in \mathbb{R}^{(n-s.ny-s) \times (n-s.ny-s)} \\
\bar{y}_s^{sp} & - \begin{bmatrix} y_s^{sp} \\ \vdots \\ y_s^{sp} \end{bmatrix}, \bar{y}_s^{sp} \in \mathbb{R}^{(n-s.ny)} \\
\bar{I}_{ny-s} & - \begin{bmatrix} I_{ny-s} \\ \vdots \\ I_{ny-s} \end{bmatrix}, \bar{I}_{ny-s} \in \mathbb{R}^{(n-s.ny-s) \times ny-s} \\
\Psi_s(\theta_p) & - \begin{bmatrix} C_s A_s(\theta_p) \\ C_s A_s^2(\theta_p) \\ \vdots \\ C_s A_s^m(\theta_p) \\ C_s A_s^{m+1}(\theta_p) \\ \vdots \\ C_s A_s^{n-s}(\theta_p) \end{bmatrix} \\
\Theta_s(\theta_p) & - \begin{bmatrix} C_s B_s(\theta_p) & 0 & \cdots & 0 \\ C_s A_s(\theta_p) B_s(\theta_p) & C_s B_s(\theta_p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_s A_s^{m-1}(\theta_p) B_s(\theta_p) & C_s A_s^{m-2}(\theta_p) B_s(\theta_p) & \cdots & C_s B_s(\theta_p) \\ C_s A_s^m(\theta_p) B_s(\theta_p) & C_s A_s^{m-1}(\theta_p) B_s(\theta_p) & \cdots & C_s A_s(\theta_p) B_s(\theta_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_s A_s^{n-s-1}(\theta_p) B_s(\theta_p) & C_s A_s^{n-s-2} B_s(\theta_p) & \cdots & C_s A_s^{n-s-m}(\theta_p) B_s(\theta_p) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão (IX-10), vem:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-s} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& = \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) - \bar{y}_s^{sp} \right]^T \bar{Q}_s \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) - \bar{y}_s^{sp} \right] \\
& + 2 \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) - \bar{y}_s^{sp} \right]^T \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) \Delta u_k \\
& + 2 \left[ -\Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) + \bar{y}_s^{sp} \right]^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \delta_{k,s}(\theta_p) + \Delta u_k^T \left[ \Theta_s^T(\theta_p) \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) \right] \Delta u_k \\
& + \Delta u_k^T \left[ -\Theta_s^T(\theta_p) \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \right] \delta_{k,s}(\theta_p) + \delta_{k,s}^T(\theta_p) \left[ -\bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) \right] \Delta u_k \\
& + \delta_{k,s}^T(\theta_p) \left[ \bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \right] \delta_{k,s}(\theta_p)
\end{aligned} \tag{IX-11}$$

A soma infinita da parte estável do modelo pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_p}(k+n-s+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) z_{\theta_p}(k+n-s+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) z_{\theta_p}(k+n-s+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) A_d^j(\theta_p) z_{\theta_p}(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) A_d^j(\theta_p) z_{\theta_p}(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] \\
& x_{ys,\theta_p} \quad - \quad x_{ys}(\theta_p)
\end{aligned} \tag{IX-12}$$

Substituindo a equação (IX-4) na equação (IX-12),obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) \begin{bmatrix} I_{ny-s} & 0 \\ 0 & F^{st^j}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} V_s(\theta_p) \begin{bmatrix} I_{ny-s} & 0 \\ 0 & F^{st^j}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) \\ z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]
\end{aligned} \tag{IX-13}$$

Decompõe-se a matriz de autovetores:

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} \begin{bmatrix} V_s^i(\theta_p) & V_s^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) \\ F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \quad \text{(IX-14)}$$

$$\left[ C_{ys} \begin{bmatrix} V_s^i(\theta_p) & V_s^{st}(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) \\ F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T$$

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) + C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T Q_s \quad \text{(IX-15)}$$

$$\left[ C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) + C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T$$

$$\left[ C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) + C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T$$

$$\left[ C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) + C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T$$

Para limitar a soma indicada em **(IX-15)**, acrescenta-se ao problema de otimização a restrição:

$$C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{\theta_p}^i(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) = 0 \quad \text{(IX-16)}$$

Transformando a restrição **(IX-16)** para o estado medido e no instante atual:

$$C_{ys} V_s^i(\theta_p) N_{1,s} V_s^{-1}(\theta_p) N_s \left[ A_s^{n-s}(\theta_p) x_{\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right] - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) = 0 \quad \text{(IX-17)}$$

Com a restrição indicada em **(IX-17)** satisfeita, **(IX-15)** transforma-se em.

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T Q_s \quad \text{(IX-18)}$$

$$\left[ C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st^j}(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \right]^T$$

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k)^T \left[ \sum_{j=1}^{\infty} F^{stj}(\theta_p)^T V_s^{st}(\theta_p)^T C_{ys}^T Q_s C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{stj}(\theta_p) \right] z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \quad \text{(IX-19)}$$

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k)^T P_s(\theta_p) z_{\theta_p}^{st}(k+n-s|k) \quad \text{(IX-20)}$$

$$P_s(\theta_p) = \sum_{j=1}^{\infty} F^{stjT} V_s^{st}(\theta_p)^T C_{ys}^T Q_s C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{stj}$$

$$P_s(\theta_p) = F^{stT}(\theta_p) P_s(\theta_p) F^{st}(\theta_p) + F^{st}(\theta_p)^T V_s^{st}(\theta_p)^T C_{ys}^T Q_s C_{ys} V_s^{st}(\theta_p) F^{st}(\theta_p)$$

Expressando a equação **(IX-20)** para o estado medido e no instante atual, vem:

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$\left[ N_{2,s} V_s^{-1}(\theta_p) N_s \left( A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right) \right]^T P_s(\theta_p) \left[ N_{2,s} V_s^{-1}(\theta_p) N_s \left( A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right) \right] \quad \text{(IX-21)}$$

$$\sum_{j=n-s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] =$$

$$\left[ A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right]^T \tilde{Q}_s(\theta_p) \left[ A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right] \quad \text{(IX-22)}$$

$$\tilde{Q}_s(\theta_p) = N_s^T V_s^{-1}(\theta_p)^T N_{2,s}^T P_s(\theta_p) N_{2,s} V_s^{-1}(\theta_p) N_s$$

$$B_{m,s}(\theta_p) = \left[ A_s^{n-s-1}(\theta_p) B(\theta_p) \quad A_s^{n-s-2}(\theta_p) B(\theta_p) \quad \dots \quad A_s^{n-s-m}(\theta_p) B(\theta_p) \right]$$

Desenvolve-se a expressão em **(IX-22)** e obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=n_s+1}^{\infty} \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s,\theta_p}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) \right] = \\
& x_{s,\theta_p}(k|k)^T A_s^{n-s}(\theta_p)^T \tilde{Q}_s(\theta_p) A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) \\
& + 2 \left[ x_{s,\theta_p}(k|k)^T A_s^{n-s}(\theta_p)^T \tilde{Q}_s(\theta_p) B_{m,s}(\theta_p) \right] \Delta u_k \\
& + B_{m,s}^T(\theta_p) \tilde{Q}_s(\theta_p) B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k
\end{aligned} \tag{IX-23}$$

Desta forma, a função objetivo para o problema robusto, envolvendo um processo que tenha polos estáveis e polos integradores, fica:

$$\begin{aligned}
J_k(\Delta u_k, \delta_k, \delta_k^i, \delta_{k,s}(\theta_p)) &= \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right]^T \bar{Q} \\
& \left[ \Psi x(k) + \Theta \Delta u_k - \bar{y}^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_k - \tilde{I}_{ny} \delta_k^i \right] \\
& + \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) + \Theta_s(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_{k,s}(\theta_p) \right]^T \bar{Q}_s \\
& \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k) + \Theta_s(\theta_p) \Delta u_k - \bar{y}_s^{sp} - \bar{I}_{ny} \delta_{k,s}(\theta_p) \right] + \\
& \left[ A^n(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right]^T \tilde{Q}_s(\theta_p) \\
& \left[ A^n(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right] \\
& + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u(k+j|k)^T R \Delta u(k+j|k) + \delta_k^T S_1 \delta_k + \delta_{k,s}^T(\theta_p) S_{1,s} \delta_{k,s}(\theta_p) + \delta_k^T S_2 \delta_k^i
\end{aligned} \tag{IX-24}$$

A função objetivo indicada em (IX-24) pode ser escrita na forma da programação quadrática de um problema de otimização, com o apoio dos desenvolvimentos expressos em (IX-9), (IX-11), e (IX-23).

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k, \delta_k^i, \delta_{k,s}} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T & \delta_k^{iT} & \delta_{k,s}^T(\theta_p) \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \\ \delta_{k,s}(\theta_p) \end{bmatrix} + 2c_f^T \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_k^i \\ \delta_{k,s}(\theta_p) \end{bmatrix} + c \tag{IX-25}$$

s.a.

$$\left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N A^n x(k|k) + \left[ V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2 \right] V^{-1} N B_m \Delta u_k - y_s^{sp} - \delta_k = 0$$

$$V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i = 0$$

$$\begin{aligned}
C_{y,s} V_s^i(\theta_p) N_{1s} V_s^{-1}(\theta_p) N_s \left[ A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k \right] \\
- y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) = 0
\end{aligned}$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

$$\begin{aligned}
& u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max} \\
H & - \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 \\ H_{41} & 0 & 0 & H_{44} \end{bmatrix} \\
H_{11} & - \Theta^T \bar{Q} \Theta + \Theta_s^T(\theta_p) \bar{Q} \Theta_s(\theta_p) + B_{m,s}^T(\theta_p) \bar{Q}_s B_{m,s}(\theta_p) + \bar{R} \\
H_{12} & - -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\
H_{13} & - -\Theta^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\
H_{14} & - -\Theta_s^T(\theta_p) \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \\
H_{21} & - -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \\
H_{22} & - \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + S_1 \\
H_{23} & - \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\
H_{31} & - -\tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta \\
H_{32} & - \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\
H_{33} & - \tilde{I}_{ny}^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} + S_2 \\
H_{41} & - -\bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) \\
H_{44} & - \bar{I}_{ny-s}^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} + S_{1,s} \\
c_f^T & - \begin{bmatrix} c_{f1} \\ -x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} + \bar{y}^{sp^T} \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ -x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \tilde{I}_{ny} + \bar{y}^{sp^T} \bar{Q} \tilde{I}_{ny} \\ x_{s,\theta_p}^T(k|k) \Psi_s^T(\theta_p) \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} + \bar{y}_s^{sp^T} \bar{Q}_s \bar{I}_{ny-s} \end{bmatrix}^T \\
c_{f1} & - x_{s,\theta_p}^T(k|k) A_s^{n^T} \bar{Q}_s B_{m,s}(\theta_p) + x_{s,\theta_p}^T(k|k) \Psi_s^T(\theta_p) \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) \\
& - \bar{y}_s^{sp} \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_p) + x^T(k|k) \Psi^T \bar{Q} \Theta - \bar{y}^{sp} \bar{Q} \Theta \\
& + x_s^T(k|k) A_s^{n^T}(\theta_p) \bar{Q}_s A_s^n(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + \\
c & - \left[ \Psi x(k|k) - \bar{y}^{sp} \right]^T \bar{Q} \left[ \Psi x(k|k) - \bar{y}^{sp} \right] \\
& + \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) - \bar{y}_s^{sp} \right]^T \bar{Q}_s \left[ \Psi_s(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) - \bar{y}_s^{sp} \right]
\end{aligned}$$

### IX.3. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO CONSIDERADO PELO IHPMC ROBUSTO

O problema de otimização será composto por dois problemas, aqui definidos como problema A e problema B.

O primeiro problema, conforme descrito no sistema de integrador puro, vide capítulo VII, tem como finalidade minimizar as folgas associadas aos polos integradores que compõe o processo.

Problema A:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k^i} \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^i \quad (\text{IX-26})$$

s.a.

$$\begin{aligned} V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i &= 0 \\ -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) &\leq \Delta u_{\max} \\ u_{\min} \leq u(k+j|k) &\leq u_{\max} \end{aligned}$$

O segundo problema será obtido a partir do desenvolvimento da função objetivo expressa em (IX-24) na forma de uma QP, considerando a solução  $\delta_{k,a}^i$  encontrada para o problema A. De forma análoga à manipulação algébrica feita para os casos de processo estável e do processo integrador puro, chega-se ao problema indicado em (IX-27):

Problema B:

$$\min_{\Delta u_k, \delta_k^i, \delta_{k,s}^i} J_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k^T & \delta_k^T & \delta_{k,s}^T \end{bmatrix} H(\theta_N) \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + 2c_f^T(\theta_N) \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \delta_k \\ \delta_{k,s} \end{bmatrix} + c(\theta_N) \quad (\text{IX-27})$$

s.a.

$$\begin{aligned} [V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2] V^{-1} N A^n x(k|k) + [V_1^{is} N_1 + V_1^i N_2] V^{-1} N B_m \Delta u_k \\ - \bar{y}^{sp} - \delta_k^i &= 0 \\ V_1^{is} N_2 V^{-1} N A^n x(k|k) + V_1^{is} N_2 V^{-1} N B_m \Delta u_k - \delta_k^i &= 0 \\ C_{y,s} V_s^i(\theta_p) N_{1s} V_s^{i-1}(\theta_p) N_s [A_s^{n-s}(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta u_k] \\ - \bar{y}_s^{sp} - \delta_{k,s}^i(\theta_p) &= 0 \\ J_k(\Delta u_k, \delta_{k,s}^i(\theta_p), \theta_p) &\leq J_k(\tilde{\Delta u}_k, \tilde{\delta}_{k,s}^i(\theta_p), \theta_p), p=1 \cdots L \\ \delta_k^i &= \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max} \\
& u_{\min} \leq u(k+j|k) \leq u_{\max} \\
H & - \begin{bmatrix} H_{11} & -\Theta^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & -\Theta_s^T(\theta_N) \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s} \\ -\bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \Theta & S_1 + \bar{I}_{ny}^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} & 0_{ny \times ny_s} \\ -\bar{I}_{ny,s} \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_N) & 0_{ny_s \times ny} & S_{1,s} + \bar{I}_{ny,s}^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s} \end{bmatrix} \\
H_{11} & - \Theta^T \bar{Q} \Theta + \bar{R} + B_{m,s}^T(\theta_N) \tilde{Q} B_{m,s}(\theta_N) + \Theta_s^T(\theta_N) \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_N) \\
\bar{R} & - \begin{bmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{m.nu} \\
c_f^T & - \begin{bmatrix} c_{f1} \\ -(\Psi_x(k) - \bar{y}^{-sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*})^T \bar{Q} \bar{I}_{ny} \\ (\Psi_s(\theta_N) x_{s,\theta_N}(k) - \bar{y}_s^{-sp})^T \bar{Q}_s \bar{I}_{ny,s} \end{bmatrix} \\
c_{f1} & - (\Psi_x(k) - \bar{y}^{-sp} - \tilde{I}_{ny} \delta_{k,a}^{i*})^T \bar{Q} \Theta + (\Psi_s(\theta_N) x_{s,\theta_N}(k) - \bar{y}_s^{-sp})^T \bar{Q}_s \Theta_s(\theta_N) \\
& \quad + x_{s,\theta_N}^T(k) A_s^{n-s^T}(\theta_N) \tilde{Q}_s B_{m,s}(\theta_N) \\
& \quad + x_{s,\theta_N}^T(k|k) A_s^{n^T}(\theta_N) \tilde{Q}_s A_s^n(\theta_N) x_{s,\theta_N}(k|k) + \\
c & - \begin{bmatrix} \Psi_x(k|k) - \bar{y}^{-sp} \end{bmatrix}^T \bar{Q} \begin{bmatrix} \Psi_x(k|k) - \bar{y}^{-sp} \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} \Psi_s(\theta_N) x_{s,\theta_N}(k|k) - \bar{y}_s^{-sp} \end{bmatrix}^T \bar{Q}_s \begin{bmatrix} \Psi_s(\theta_N) x_{s,\theta_N}(k|k) - \bar{y}_s^{-sp} \end{bmatrix} \\
\Delta \tilde{u}_k & - \begin{bmatrix} \Delta u_{k+1}^* & \Delta u_{k+2}^* & \cdots & \Delta u_{k+m-1}^* & 0 \end{bmatrix} \\
\tilde{\delta}_{k,s}(\theta_p) & - C_y V^i(\theta_p) N_{1s} V^{-1}(\theta_p) N_s \left[ A_s^n(\theta_p) x_{s,\theta_p}(k|k) + B_{m,s}(\theta_p) \Delta \tilde{u}_k \right] \\
& \quad - y^{sp} - \tilde{\delta}_{k,s}(\theta_p) = 0 \\
\theta_N & - \text{Modelo com maior probabilidade de ocorrência} \\
\delta_{k,a}^{i*} & - \text{Solução \u00f3tima para as folgas dos polos integradores do} \\
& \quad \text{processo encontrada no problema A}
\end{aligned}$$

Por conta da restri\u00e7\u00e3o de contra\u00e7\u00e3o da fun\u00e7\u00e3o objetivo, o termo constante \u00e9 considerado na fun\u00e7\u00e3o de custo do problema de otimiza\u00e7\u00e3o.

#### IX.4. PROVA DE ESTABILIDADE DO IHRMPC APLICADO A PROCESSOS EST\u00c1VEIS CASO ROBUSTO E INTEGRADORES

Seja um sistema como o indicado em (IX-5) e (IX-6), com vari\u00e1veis integradoras e vari\u00e1veis est\u00e1veis em rela\u00e7\u00e3o \u00e0s vari\u00e1veis manipuladas consideradas pelo controlador e que, ainda, o modelo da parte est\u00e1vel tenha incerteza que resida entre um conjunto



$\Omega$  de modelos conhecidos, Se o novo estado estacionário desejado é alcançável, o que significa dizer que os novos *set points* são possíveis de serem atingidos pelo sistema e, conseqüentemente, as folgas dos problemas de otimização **(IX-26)** e **(IX-27)** serão nulas, o controlador proposto fornece um conjunto de ações de controle estáveis que conduzem o sistema para este novo estado, com resposta de erro decrescente.

Para demonstrar essa afirmação, seja a solução ótima no instante  $k$  do problema **(IX-27)** como a indicada nas expressões **(IX-28)**, **(IX-29)** e **(IX-30)**, enquanto que  $\delta_{k,a}^{i*}$  foi a solução encontrada no problema **(IX-26)** e  $J_k^*$  o valor ótimo de  $J_k$ .

$$\left[ \Delta u^*(k|k) \quad \Delta u^*(k+1|k) \quad \cdots \quad \Delta u^*(k+m-1|k) \right] \quad \text{(IX-28)}$$

$$\delta_k^* \quad \text{(IX-29)}$$

$$\delta_{k,s}^*(\theta_1), \delta_{k,s}^*(\theta_2), \dots, \delta_{k,s}^*(\theta_L) \quad \text{(IX-30)}$$

O problema A tem sua demonstração de estabilidade similar ao problema do controlador integrador puro, tendo em vista que sua função objetivo e restrição são exatamente iguais e a solução inicial proposta  $\tilde{\Delta u}_{k+1,b}$  seria definida no problema B. Desta forma, no instante  $k$  tem-se uma solução ótima  $\delta_{k,a}^{i*}$  que satisfaz a restrição **(VII-29)**. No instante seguinte,  $k+1$ , esta solução, acompanhada da solução apresentada pelo problema B na interação anterior e deslocada de uma ação de controle, compõem uma solução viável para o problema A, pois a restrição em questão continua sendo satisfeita, como visto a seguir.

$$V_1^{is} z^i(k+1+n|k+1) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(IX-31)}$$

Nesse novo instante  $k$  pressupõe-se que a trajetória do estado será mantida e, desta forma, a equação em **(VII-47)** é válida e:

$$V_1^{is} z^i(k+n+2|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(IX-32)}$$

A predição do estado é definida pela equação que foi mostrada em **(VII-50)**. Portanto, a equação **(IX-32)** pode ser escrita como:

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^{i*} = 0 \quad \text{(IX-33)}$$

A expressão indicada em **(IX-33)** corresponde à restrição escrita no instante  $k$ , que é

verdadeira. Logo, a solução proposta é viável.

Como o problema A tem como objetivo minimizar a folga  $\delta_k^i$ , o próximo valor da função de custo do problema terá um valor menor ou igual a esta solução viável, limitada às restrições de  $\Delta u_{\max}$ .

Para o problema B, aqui reescrito de uma forma mais adequada para o desenvolvimento da prova da estabilidade, tem-se:

$$\min_{\Delta u_{b,k}, \delta_k^i} J_k \quad (\text{IX-34})$$

s.a.

$$V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k = 0 \quad (\text{VII-28})$$

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_k^i = 0 \quad (\text{VII-29})$$

$$C_{ys} V_s^i(\theta_p) z_{s\theta_p}^i(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}(\theta_p) = 0 \quad (\text{IX-35})$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u_{\max}$$

A função objetivo, para o modelo  $\theta_p$  que corresponda ao modelo real do processo,  $\theta_T$ , com os valores ótimos de  $\Delta u_{k,b}^*$ ,  $\delta_k^*$ ,  $\delta_{k,a}^{i*}$  e  $\delta_{k,s}^*(\theta_T)$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} J_k^* = & \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^*(\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^*(\theta_T) \\ & \quad + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad (\text{IX-36})$$

$$\begin{aligned} J_k^* = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \\ & \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] + \\ & \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] + \\ & \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^*(\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^*(\theta_T) + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad (\text{IX-37})$$

Isolando, na equação (IX-37), as expressões indicadas como somatório, visando uma

futura substituição no momento de correlacionar o valor da função objetivo deste instante com o instante seguinte, vem:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right] \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) = J_k^* - \tag{IX-38} \\
& \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \\
& \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right] \\
& - \Delta u^*(k|k)^T R \Delta u^*(k|k) - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,s}^* (\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^* (\theta_T) - \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*}
\end{aligned}$$

Ainda para este instante  $k$ , a solução ótima, obviamente, satisfaz as restrições do problema B. Desta forma, pode-se concluir que as equações indicadas em (VIII-18), (VIII-19) e (IX-39) são verdadeiras.

$$V_1^{is} z^{is}(k+n|k) + V_1^i z^i(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \tag{VIII-18}$$

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^* = 0 \tag{VIII-19}$$

$$C_{ys} V_s^i(\theta_T) z_{s\theta T}^i(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) = 0 \tag{IX-39}$$

Se  $\Delta u^*(k|k)$  for aplicado aos sistemas indicados em (IX-5) e (IX-6) e não houver nenhum distúrbio, então, no instante  $k+1$  seguinte, a sequência indicada em (IX-40), (IX-41), (IX-42) e (IX-43) é uma solução possível para este instante.

$$\Delta \tilde{u}_{k+1,b} = \left[ \Delta u^*(k+1|k)^T \quad \dots \quad \Delta u^*(k+m-1|k)^T \quad 0 \right]^T \tag{IX-40}$$

$$\delta_{k+1,b} = \delta_{k,b}^* = \delta_k^* \tag{IX-41}$$

$$\delta_{k+1,a}^i = \delta_{k,a}^{i*} \tag{IX-42}$$

$$\delta_{k+1,b,s}(\theta_T) = \delta_{k,b,s}^*(\theta_T) = \delta_{k,s}^*(\theta_T) \tag{IX-43}$$

Para que esta solução seja viável, deve satisfazer as restrições (VIII-18), (VIII-19) e (IX-39).

$$V_1^{is} z^{is} (k+1+n|k+1) + V_1^i z^i (k+1+n|k+1) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{IX-44})$$

$$V_1^{is} z^i (k+1+n|k+1) - \delta_{k,a}^* = 0 \quad (\text{IX-45})$$

$$C_{ys} V_s^i (\theta_T) z_{s\theta T}^i (k+1+n-s|k+1) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) = 0 \quad (\text{IX-46})$$

Não ocorrendo perturbações, a estimativa do estado para o instante  $k+1+n$  feita no instante  $k+1$  será igual à estimativa feita para o instante  $k+n+2$  no instante  $k$ .

$$z^{is} (k+1+n|k+1) = z^{is} (k+n+2|k) \quad (\text{IX-47})$$

$$z^i (k+1+n|k+1) = z^i (k+n+2|k) \quad (\text{IX-48})$$

$$z_{s\theta T}^i (k+1+n-s|k+1) = z_{s\theta T}^i (k+n-s+2|k) \quad (\text{IX-49})$$

Substituindo **(IX-47)**, **(IX-48)** e **(IX-49)** em **(IX-44)**, **(IX-45)** e **(IX-46)**, tem-se:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n+2|k) + V_1^i z^i (k+n+2|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{IX-50})$$

$$V_1^{is} z^i (k+n+2|k) - \delta_{k,a}^* = 0 \quad (\text{IX-51})$$

$$C_{ys} V_s^i (\theta_T) z_{s\theta T}^i (k+n-s+2|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) = 0 \quad (\text{IX-52})$$

A estimativa para o estado correspondente à parte integradora foi vista em **(VII-65)** e **(VII-50)**, a seguir repetida, para facilidade do leitor.

$$z^{is} (k+n+2|k) = z^{is} (k+n|k) + 2z^i (k+n|k) \quad (\text{VII-65})$$

$$z^i (k+n+2|k) = z^i (k+n+1|k) = z^i (k+n|k) \quad (\text{VII-50})$$

A predição de estado para a parte estável foi apresentada em **(V-91)** e, a seguir, também reescrita:

$$z_{s\theta T}^i (k+n-s+2|k) = z_{s\theta T}^i (k+n-s+1|k) = z_{s\theta T}^i (k+n-s|k) \quad (\text{IX-53})$$

Substituindo **(VII-65)** e **(VII-50)** em **(IX-50)**, **(VII-50)** em **(IX-51)** e **(IX-53)** em **(IX-52)**, vem:

$$V_1^{is} z^{is} (k+n|k) + 2V_1^{is} z^i (k+n|k) + V_1^i z^i (k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* = 0 \quad (\text{IX-54})$$

$$V_1^{is} z^i(k+n|k) - \delta_{k,a}^* = 0 \quad (\text{IX-55})$$

$$C_{ys} V_s^i(\theta_T) z_{s\theta T}^i(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) = 0 \quad (\text{IX-56})$$

Comparando **(IX-55)** com **(VIII-19)** e **(IX-56)** com **(IX-39)** concluímos que estas restrições são satisfeitas. E a restrição **(IX-54)** será atendida quando  $z^i(k+n|k)$  for nulo, ou seja, conforme **(IX-55)**, a folga do problema A for anulada. Portanto, após convergência do problema A, a solução proposta no instante anterior é viável. Enquanto o problema A não convergir, soluções subótimas são aplicadas ao processo por este problema B.

Para esta solução e, supondo, como nos capítulos anteriores deste trabalho, um termo infinito mais um para efeitos didáticos, a função objetivo do problema B terá a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty+1} \left[ Cx_{s\theta_T}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s\theta_T}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^*(\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^*(\theta_T) \\ & + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} \end{aligned} \quad (\text{IX-57})$$

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+j|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ Cx_{s\theta_T}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s\theta_T}(k+j|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u^*(k+j|k)^T R \Delta u^*(k+j|k) + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^*(\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^*(\theta_T) \\ & + \delta_{k,a}^{i*T} S_2 \delta_{k,a}^{i*} + \end{aligned} \quad (\text{IX-58})$$

$$\begin{aligned} & \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] + \\ & \left[ Cx_{s\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \end{aligned}$$

Na equação indicada em **(IX-58)**,  $\delta_{k,a}^{i*}$  foi considerado nulo no termo em infinito mais um, tendo em vista que o problema A já teria convergido, anulando essa folga.

O termo em infinito mais um pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
& \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \left[ Cx(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \\
& + \left[ Cx_{s\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_{s\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \\
& \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right]^T Q \\
& \quad \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* - j\delta_{k,a}^{i*} \right] \tag{IX-59} \\
& + \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]
\end{aligned}$$

O termo infinito da parte integradora pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned}
& \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ C_y x_y(k+\infty+1|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] = \\
& \left[ \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\
& \quad \left[ \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \\ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) \end{bmatrix} - y^{sp} - \delta_k^* \right] \\
& = \left[ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ V_1^{is} z^{is}(k+n|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] \tag{IX-60}
\end{aligned}$$

O termo infinito da parte estável pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned}
& \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} x_{ys,\theta_T}(k+\infty+1|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] = \\
& \left[ C_{ys} V(\theta_T) A_d^{\infty+1} z_{\theta_T}(k+n|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} V(\theta_T) A_d^{\infty+1} z_{\theta_T}(k+n-s|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] = \\
& \left[ C_{ys} \begin{bmatrix} V^i(\theta_T) & V^{st}(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st^{\infty+1}}(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_T}^i(k+n-s|k) \\ z_{\theta_T}^{st}(k+n-s|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right]^T \\
& Q_s \\
& \left[ C_{ys} \begin{bmatrix} V^i(\theta_T) & V^{st}(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny} & 0 \\ 0 & F^{st^{\infty+1}}(\theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\theta_T}^i(k+n|k) \\ z_{\theta_T}^{st}(k+n|k) \end{bmatrix} - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^*(\theta_T) \right] \tag{IX-61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ C_{ys} x_{ys, \theta_T} (k + \infty + 1 | k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} x_{ys, \theta_T} (k + \infty + 1 | k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right] = \\
& \left[ C_{ys} V^i (\theta_T) z_{\theta_T}^i (k + n - s | k) + C_{ys} V^{st} (\theta_T) F^{st^{s+1}} (\theta_T) z_{\theta_T}^{st} (k + n - s | k) \right]^T Q_s \\
& \quad - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \\
& \left[ C_{ys} V^i (\theta_T) z_{\theta_T}^i (k + n - s | k) + C_{ys} V^{st} (\theta_T) F^{st^{s+1}} (\theta_T) z_{\theta_T}^{st} (k + n - s | k) \right] = \\
& \quad - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \\
& \left[ C_{ys} V^i (\theta_T) z_{\theta_T}^i (k + n - s | k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ C_{ys} V^i (\theta_T) z_{\theta_T}^i (k + n - s | k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]
\end{aligned} \tag{IX-62}$$

Conforme (V-98) e (VII-77), pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
C_{ys} V^i (\theta_T) z_{\theta_T}^i (k + n - s | k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) &= 0 \\
C_y x_y (k + n | k) - y^{sp} - \delta_k^* &= 0
\end{aligned} \tag{IX-63}$$

Desta forma, substituindo (IX-38) em (IX-58), e utilizando (IX-63), vem:

$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \\
& \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \\
& \quad \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right] \\
& - \Delta u^* (k|k)^T R \Delta u^* (k|k) - \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* - \delta_{k,s}^* (\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^* (\theta_T) \\
& - \delta_{k,a}^{*T} S_2 \delta_{k,a}^* + \delta_k^{*T} S_1 \delta_k^* + \delta_{k,s}^* (\theta_T)^T S_{1,s} \delta_{k,s}^* (\theta_T) + \delta_{k,a}^{*T} S_2 \delta_{k,a}^*
\end{aligned} \tag{IX-64}$$

$$\begin{aligned}
J_{k+1} &= J_k^* - \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right]^T Q \left[ Cx(k|k) - y^{sp} - \delta_k^* \right] - \\
& \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right]^T Q_s \left[ Cx_s(k|k) - y_s^{sp} - \delta_{k,s}^* (\theta_T) \right] - \\
& \Delta u^* (k|k)^T R \Delta u^* (k|k)
\end{aligned} \tag{IX-65}$$

Como  $Q, Q_s$  e  $R$  são matrizes positivas pode-se afirmar que:

$$J_{k+1} < J_k^* \tag{IX-66}$$

Portanto, a solução ótima será ainda menor que a solução não ótima que, por sua vez, já é menor que a solução ótima do instante anterior.

## IX.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Retornando à coluna do item V.7, o IHMPC proposto neste capítulo vai considerar incerteza no modelo da variável indicada por  $y_2$ , que é a saída do processo com modelo estável.

A sintonia proposta para o controlador está indicada na Tabela IX-1.

**Tabela IX-1 – Parâmetros de sintonia para o IHMPC para o processo**

Descrição	Simbologia	Valor
Horizonte de controle	$m$	2
Horizonte de controle estendido modelo integrador	$n$	7
Horizonte de controle estendido modelo estável	$n_s$	11
Peso das variáveis controladas	$Q$	[1 1]
Fator de supressão	$R$	[0,1 0,1 10]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S_1$	[1000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do processo	$S_2$	[1000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S_{1,s}$	[1000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[10 400 10]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-10 -400 -10]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[0,1 50 0,01]

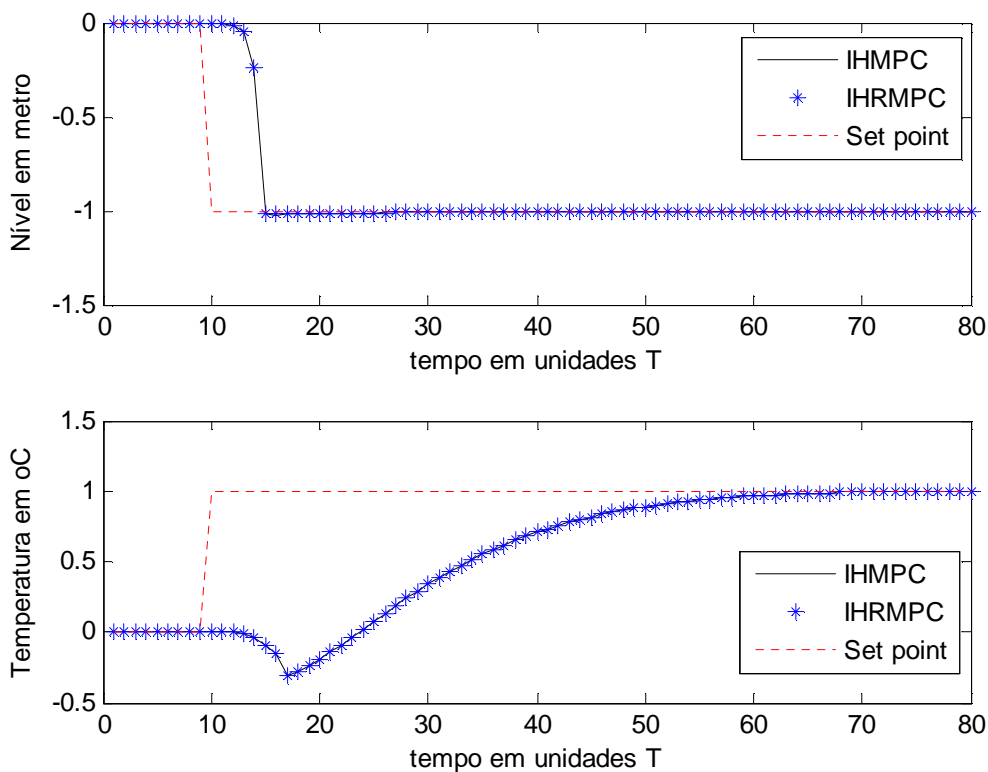
Inicialmente será verificada a performance do controlador robusto considerando



apenas um único modelo para a planta que, de fato, corresponde a este modelo. O modelo de planta e do controlador a ser considerado está indicado na equação (IX-67).

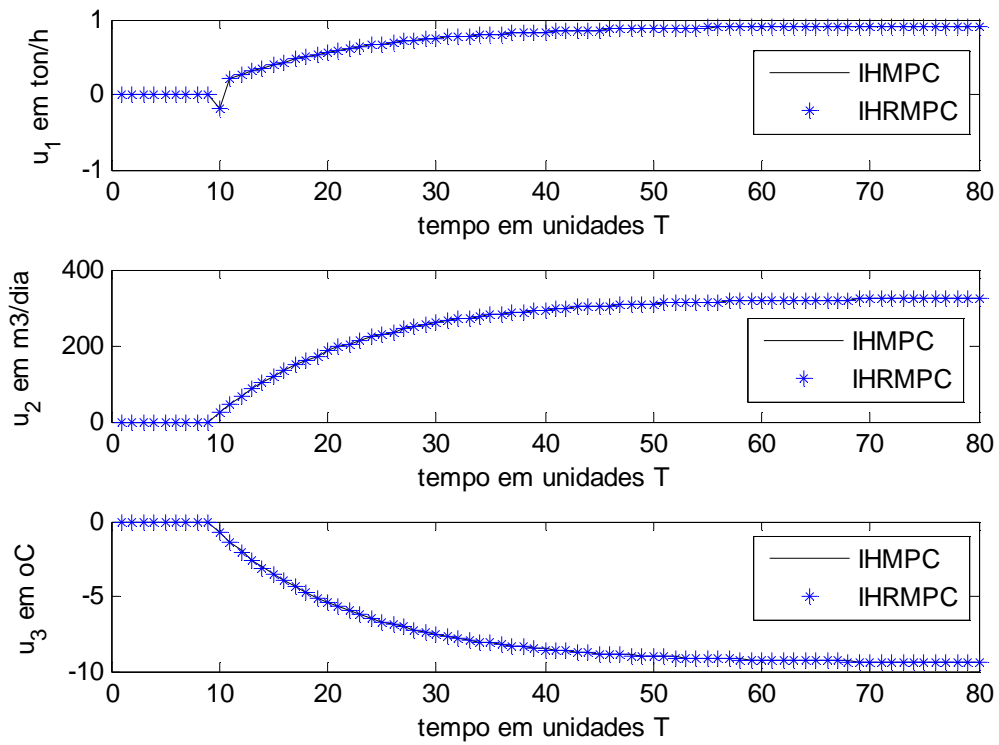
$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.3}{s} e^{-3s} & \frac{-0.7 \times 10^{-3}}{s} e^{-2s} & \frac{0.2}{s} e^{-4s} \\ \frac{4.7}{9.3s+1} e^{-7s} & \frac{1.4 \times 10^{-3}}{6.8s+1} e^{-2s} & \frac{0.4}{11.6s+1} e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad \text{(IX-67)}$$

Aplicando-se um degrau unitário aos *set points* do nível e de temperatura, obtém-se a resposta indicada na Figura IX-1. Comparando-se com o controlador nominal, pode-se perceber o mesmo desempenho do controlador robusto, como esperado, pois neste caso o controlador robusto é equivalente ao controlador nominal.

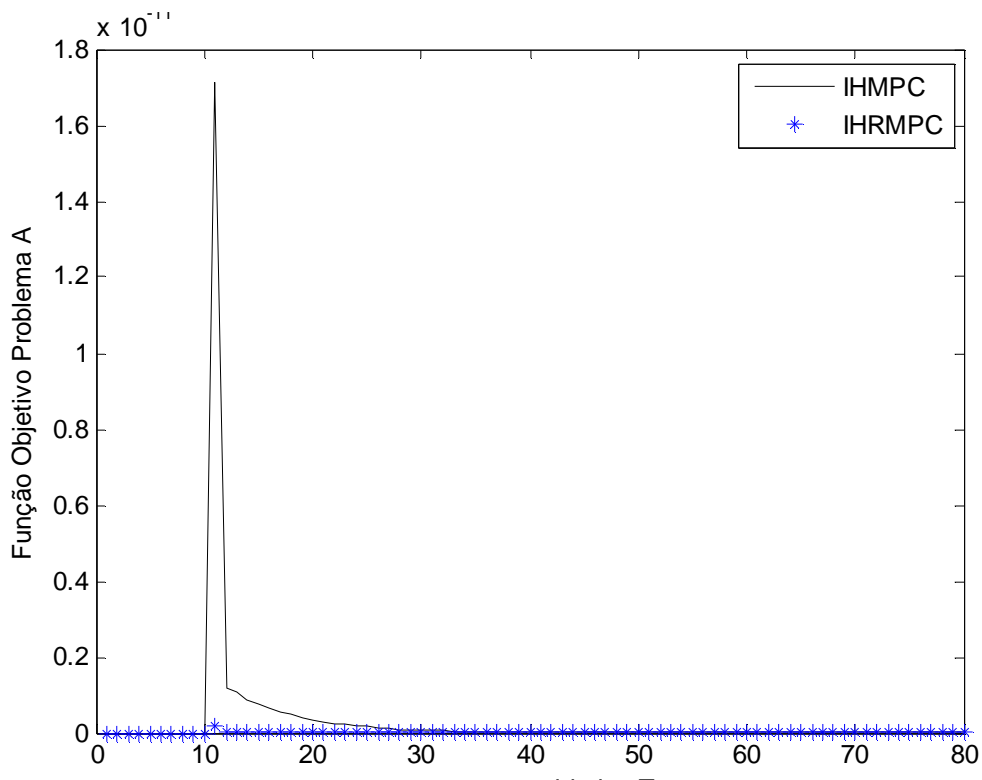


**Figura IX-1– Comparação das respostas das saídas frente a um degrau unitário nos set points do IHRMPC robusto e IHMPC nominal - caso planta com polos estáveis e polos integradores**

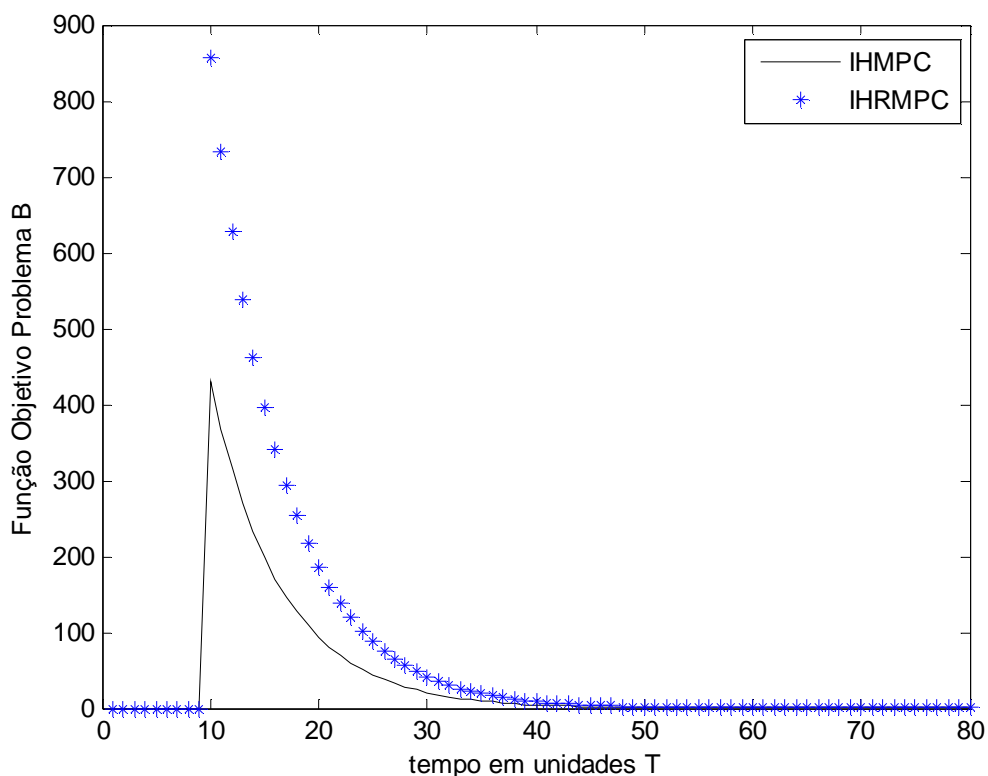
A Figura IX-2 mostra o comportamento das entradas ao longo da simulação, enquanto que a Figura IX-3 mostra a função de custo do problema A e a Figura IX-4 a função de custo do problema B. Percebe-se que o problema B converge quando o problema A retorna como folga do processo integrador o valor nulo.



**Figura IX-2– Comportamento das entradas aplicadas ao processo no IHRMPC robusto e IHMPC nominal**



**Figura IX-3– Comportamento da função objetivo do problema A de otimização do IHRMPC robusto e IHMPC nominal**



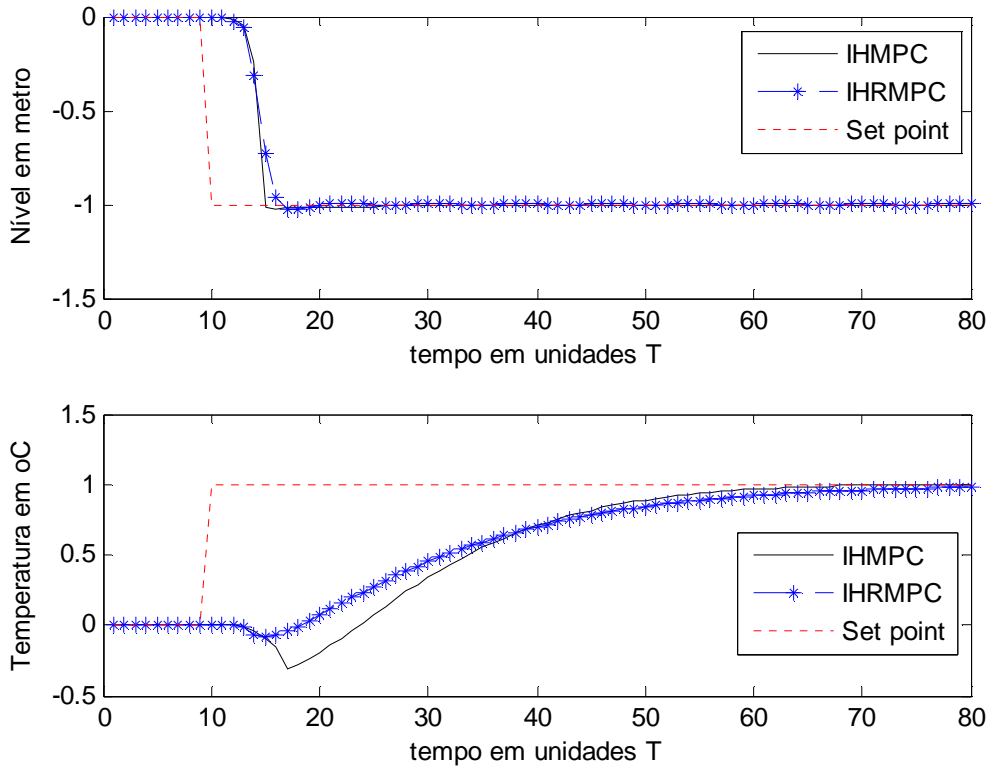
**Figura IX-4– Comportamento da função objetivo do problema B de otimização do IHRMPC robusto e IHMPC nominal**

A equação indicada em **(IX-68)** mostra a incerteza que será considerada pelo controlador. Neste caso, o controlador robusto levará em consideração, no algoritmo de otimização, as restrições dos dois modelos possíveis para o processo.

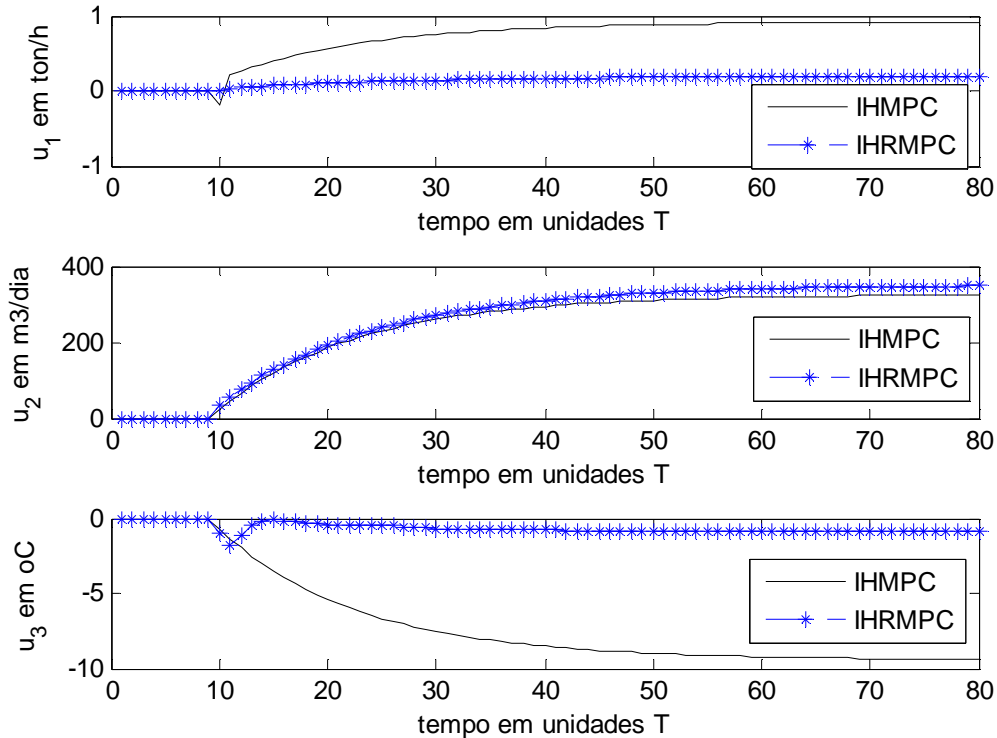
$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2,3}{s} e^{-3s} & \frac{-0,7 \times 10^{-3}}{s} e^{-2s} & \frac{0,2}{s} e^{-4s} \\ \frac{2,3}{11,16s+1} e^{-3s} & \frac{2,8 \times 10^{-3}}{8,16s+1} e^{-s} & \frac{0,48}{13,92s+1} e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad \text{(IX-68)}$$

A Figura IX-5 mostra as saídas do processo, repetindo a simulação anterior, para o modelo da planta igual ao modelo nominal. Pode-se perceber que na variável temperatura até houve uma ligeira melhora no desempenho do controlador. Na sequência, Figura IX-6, Figura IX-7 e Figura IX-8, são mostrados o comportamento das entradas, a função de custo do problema A e a função de custo do problema B.

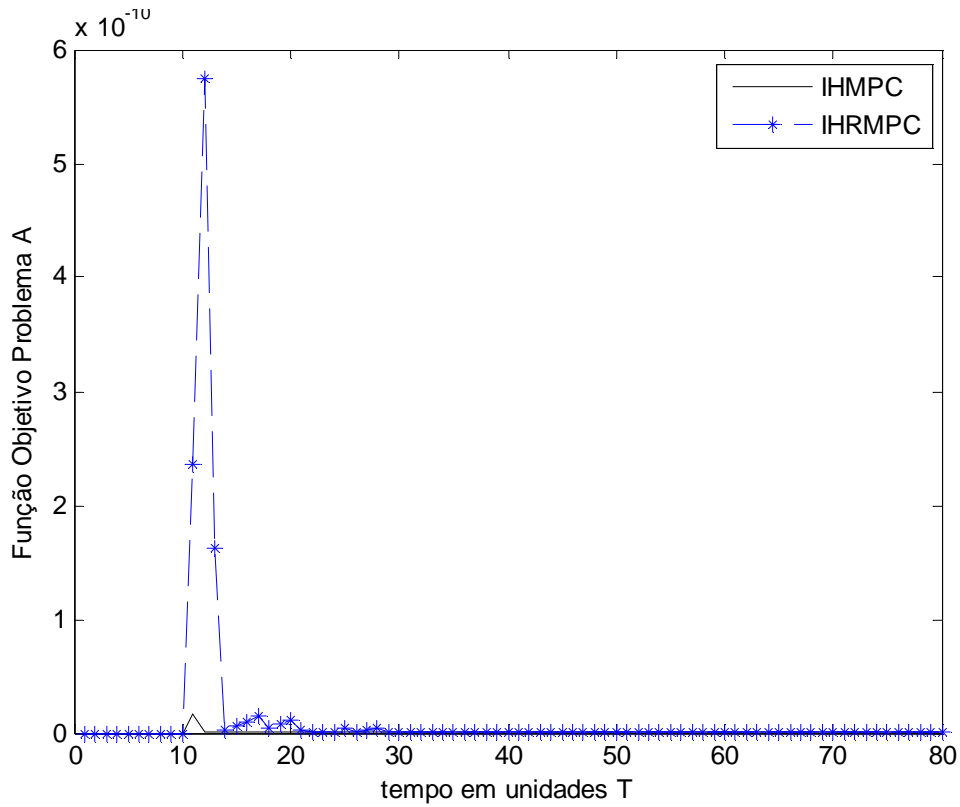
A Figura IX-9 e a Figura IX-10 mostram os mesmos resultados obtidos quando o processo tem um modelo diferente do modelo nominal considerado pelo controlador.



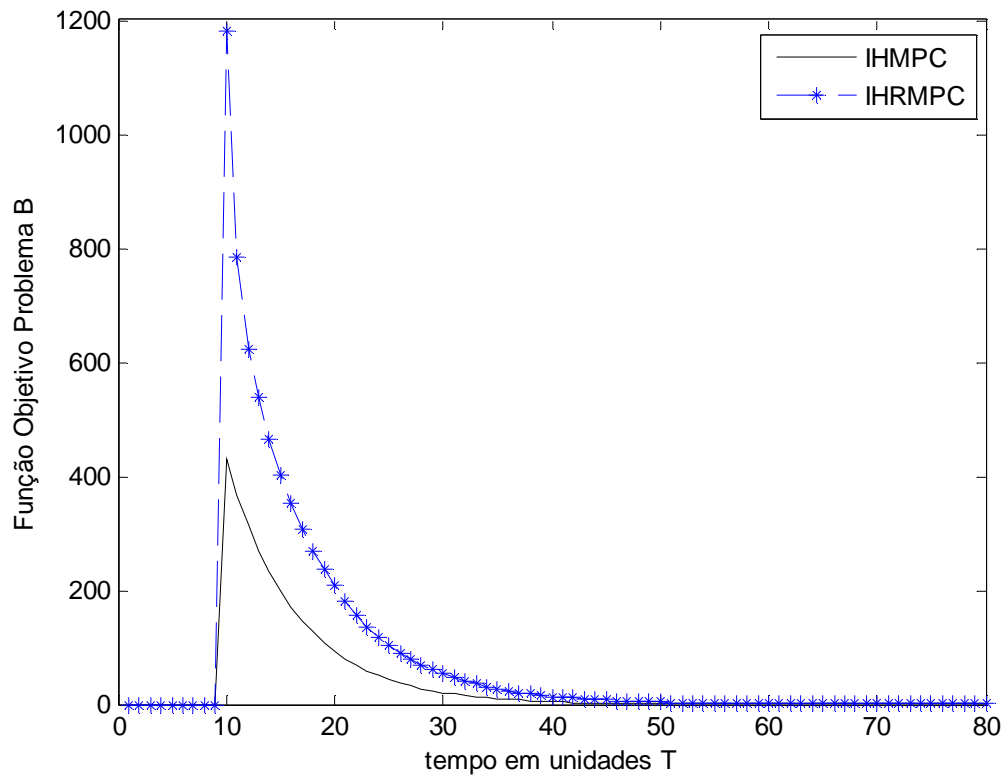
**Figura IX-5– Comparação das resposta das saídas a um degrau unitário nos set points do IHMPC e do IHRMPC – caso nominal**



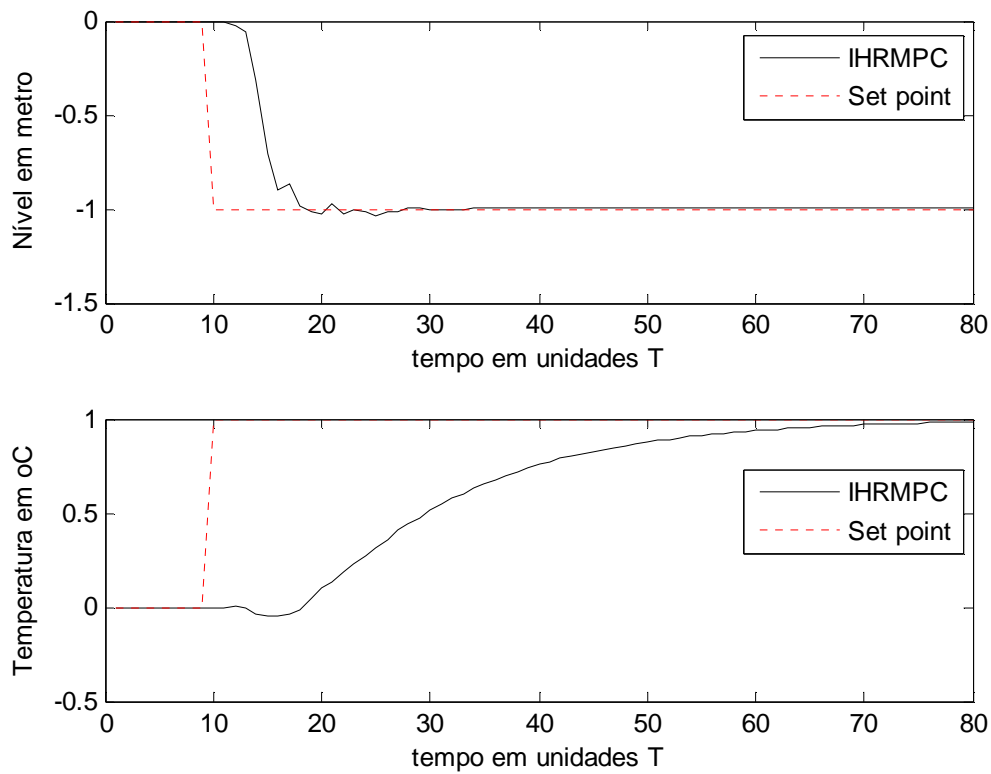
**Figura IX-6– Resposta das entradas aplicadas ao processo do IHMPC e do IHRMPC – caso nominal**



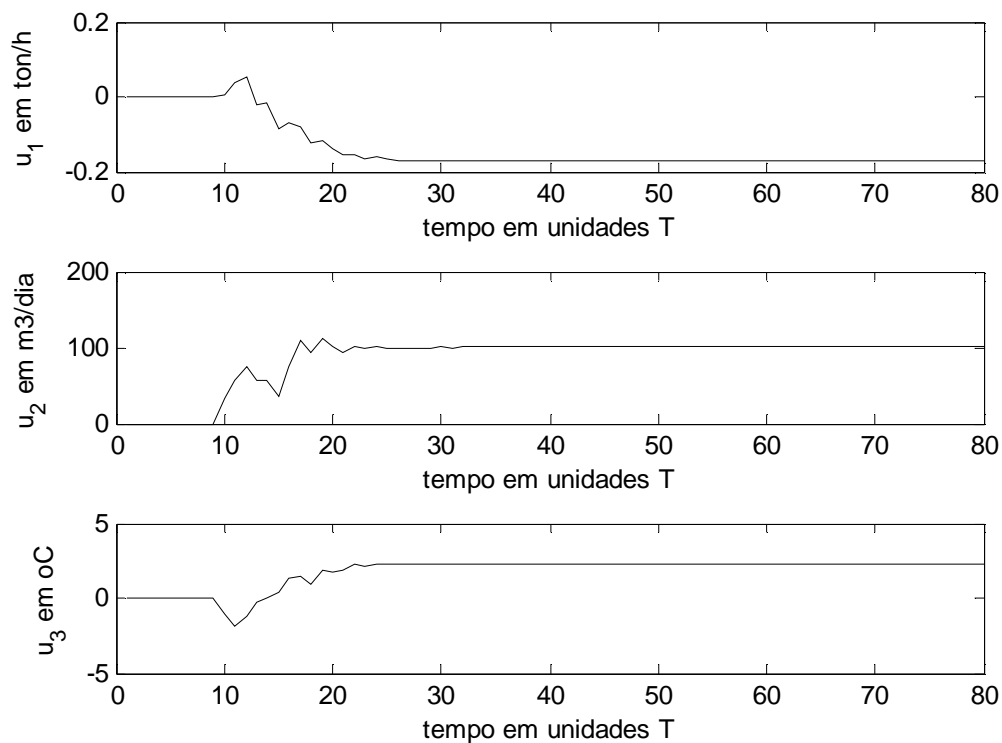
**Figura IX-7– Função objetivo do problema A de otimização do IHMPC e do IHRMPC**



**Figura IX-8– Função objetivo do problema B do IHMPC x IHRMPC**



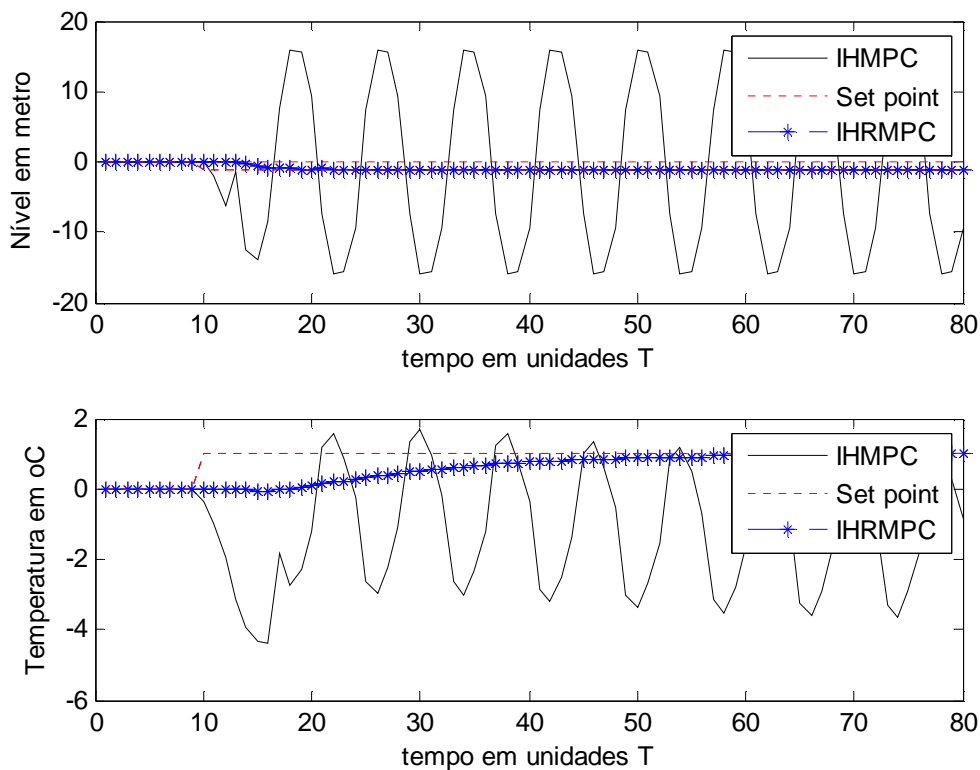
**Figura IX-9– Respostas das saídas a um degrau unitário nos set points do IHRMPC com incerteza de modelo - caso robusto**



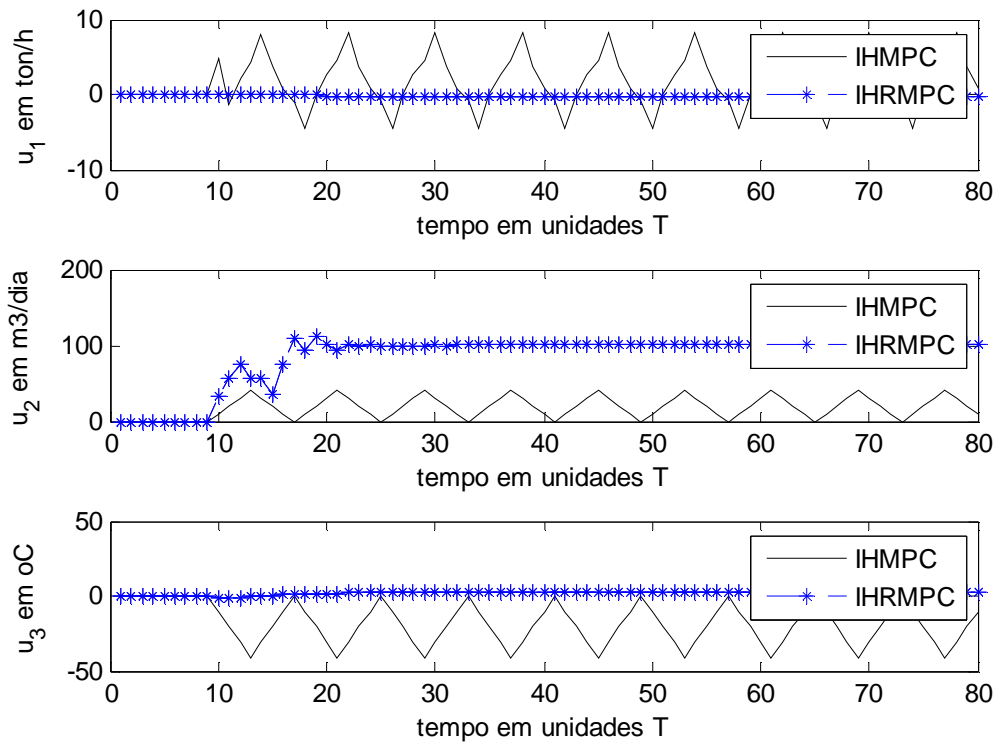
**Figura IX-10– Respostas das entradas a um degrau unitário nos set points do IHRMPC com incerteza de modelo - caso robusto**

A Figura IX-11e a Figura IX-12 mostra uma comparação de desempenho do IHMPC e do IHMPC. Os dois controladores controlam um processo com o modelo indicado em (IX-68) enquanto que o modelo considerado pelo problema de otimização é o indicado em (IX-67). Pode-se notar que o IHMPC torna a malha fechada instável enquanto que o IHRMPC mantém a estabilidade do processo. A resposta do IHRMPC foi a mesma indicada na Figura IX-9, porém em escala diferente para se perceber a oscilação do IHMPC.

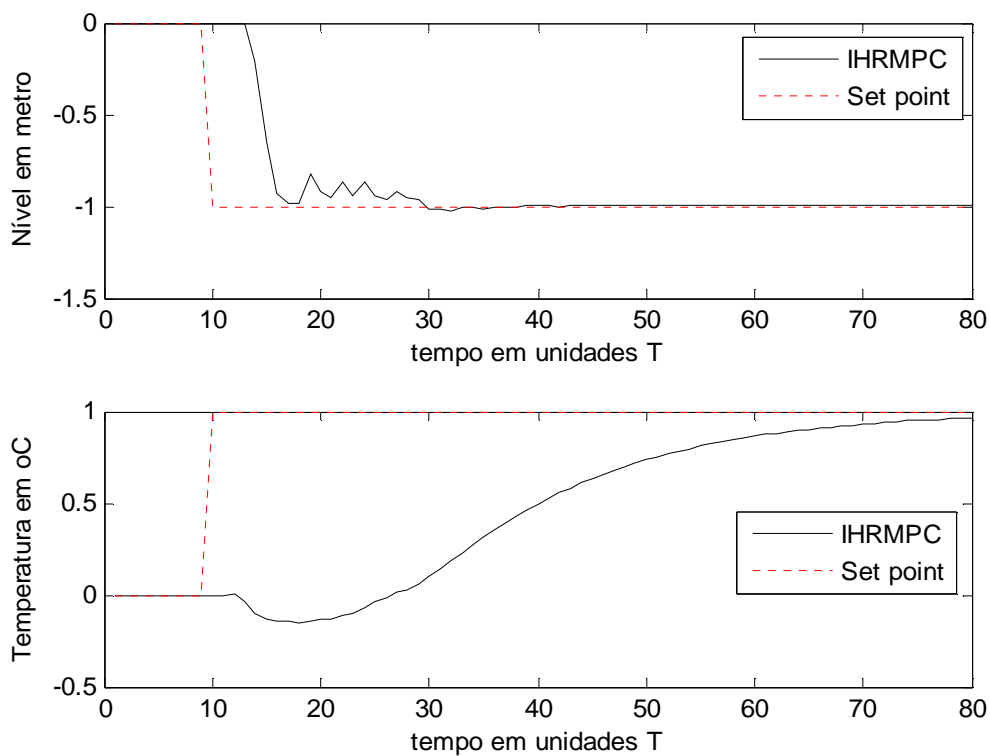
Na sequência, foi feito um teste considerando o chaveamento de restrições das entradas. A restrição de refluxo para a coluna foi alterada de 400 m<sup>3</sup>/d para 2,8 m<sup>3</sup>/d. O caso estudado continua sendo o caso robusto, ou seja, o modelo considerado no problema otimização do controlador diferente do modelo real da planta. Pode-se notar na Figura IX-13 que as variáveis controladas alcançaram os valores desejados. Na Figura IX-14 observa-se que a restrição na variável de vazão de refluxo para a coluna ficou ativa em torno do instante 10, e que tornou a ficar inativa por volta do instante 14. O controle se manteve estável durante este chaveamento. O maior grau de liberdade, número de variáveis manipuladas sobre o número de variáveis controladas, permitiu um controle sem *offset*. A Figura IX-15 mostra o valor da função objetivo do problema B como uma função assintoticamente decrescente.



**Figura IX-11– Respostas das saídas do IHMPC e do IHRMPC - caso modelo diferente do nominal**

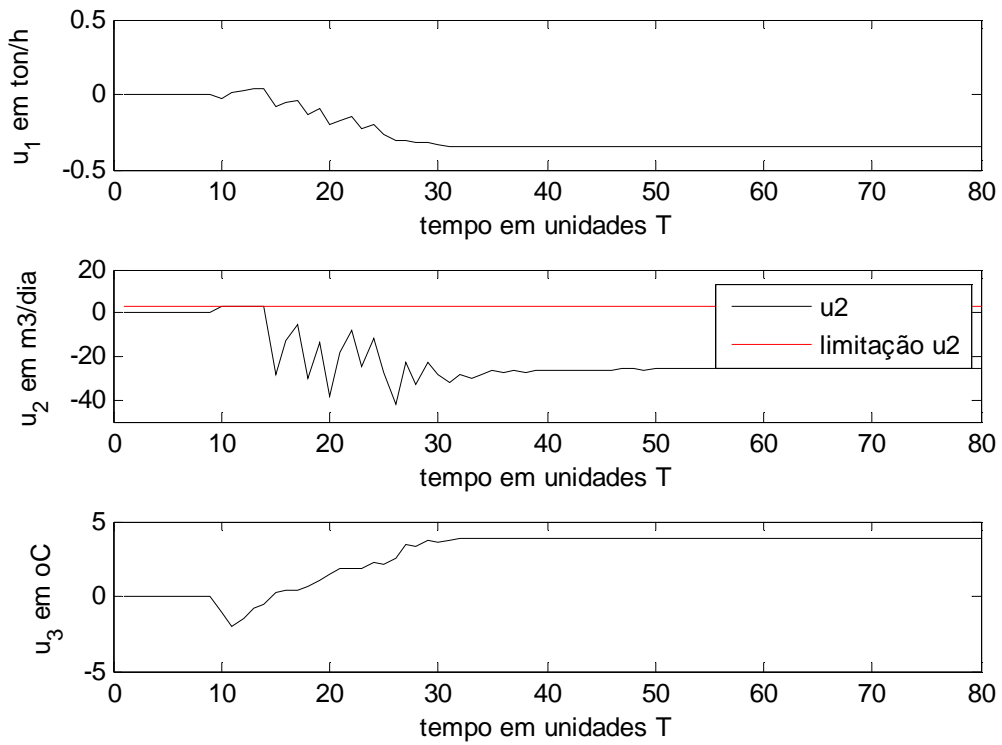


**Figura IX-12– Comportamento das entradas aplicadas ao processo do IHMPC e do IHRMPC - caso modelo diferente do nominal**

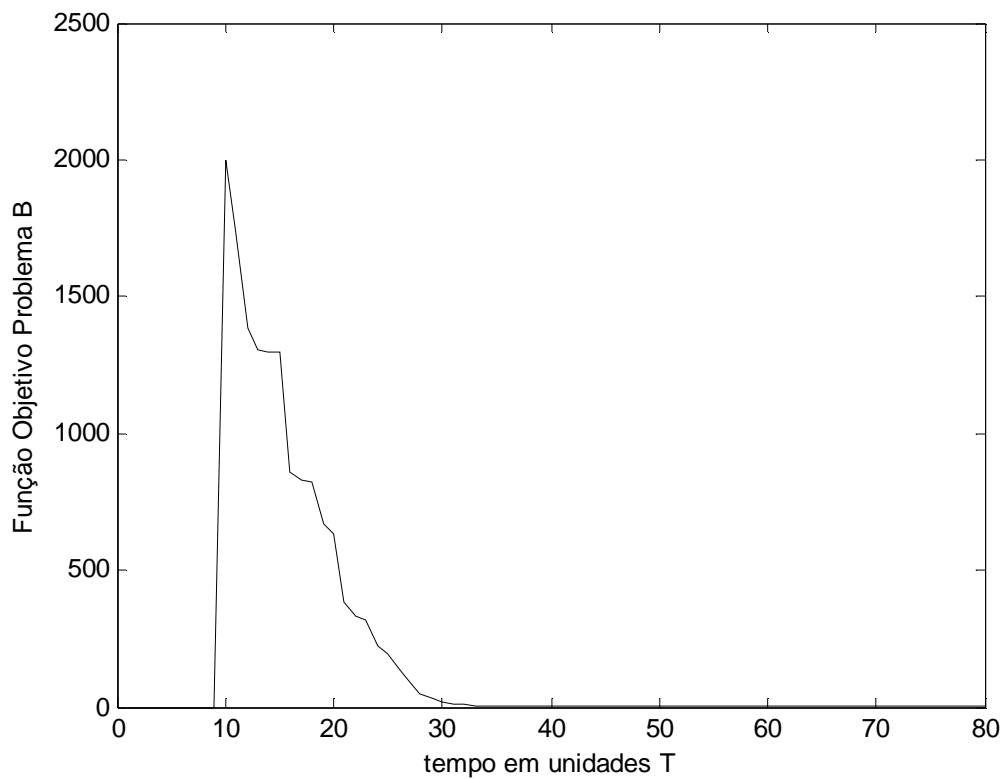


**Figura IX-13– Respostas das saídas ao problema servo do IHRMPC – Caso saturação da entrada  $u_2$**





**Figura IX-14– Comportamento das entradas ao problema servo do IHRMPC–  
Caso saturação da entrada  $u_2$**



**Figura IX-15– Função Objetivo do problema B do IHRMPC – Caso saturação da  
entrada  $u_2$**

## X. UTILIZAÇÃO DO MPC ROBUSTO COM SIMULADOR DINÂMICO DE PROCESSO

---

### X.1. OBJETIVO

O objetivo deste capítulo é de realizar uma simulação interagindo um simulador dinâmico rigoroso de processo, que representaria a planta de processo a ser controlada, e o controlador desenvolvido neste trabalho. O simulador escolhido para este fim foi o EMSO, que é a sigla para “*Environment for Modeling Simulation and Optimization*”. Na sequência será comparada a performance obtida com o controle feito por dois PID's lineares.

### X.2. HISTÓRICO E CARACTERÍSTICAS DO EMSO

O EMSO teve como início de desenvolvimento um trabalho de dissertação de mestrado na UFRGS (SOARES, 2003). Foi desenvolvido em linguagem C++ e está disponível para ser utilizado em ambiente Windows e Linux. Os modelos são escritos em linguagem orientada a objetos e o simulador e otimizador orientado por equações. O EMSO, além de outras características, permite simulação dinâmica com o Matlab, através do *Simulink*. Esta característica em particular será aproveitada neste trabalho. O *Simulink* será o elo de ligação entre o controlador, escrito no ambiente do Matlab, e o simulador.

O simulador encontra-se em constante aprimoramento devido à facilidade de programação, já que a biblioteca de modelos é elaborada em código aberto.

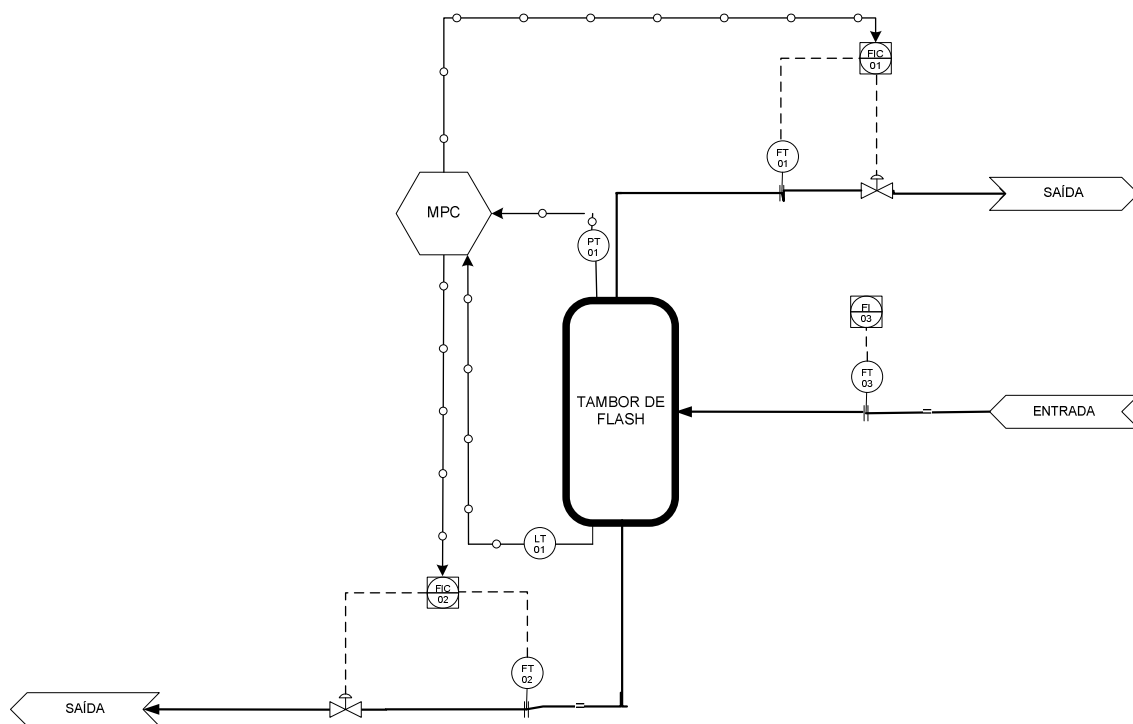
### X.3. MODELO DO TAMBOR DE FLASH

O modelo dinâmico utilizado neste trabalho será o modelo de um tambor de *flash*, com diâmetro de 3 metros, que recebe como carga de entrada uma solução de benzeno misturada à água. O tambor de *flash* tem como objetivo promover a separação da mistura líquido e vapor que chega na entrada do equipamento. Essa separação física ocorre por conta da redução de pressão no interior do tambor e consequente

expansão da mistura líquido-vapor.

O modelo foi escolhido por incorporar, neste mesmo sistema, uma variável de saída integradora, que é o nível e outra estável, como será visto mais a frente, que é a pressão do tambor. Outra característica que motivou o uso deste modelo neste trabalho foi a constatação de um ganho diferente no modelo da variável estável quando a válvula de vapor é aberta ou quando esta válvula é fechada. Esta característica define dois modelos diferentes que podem ser utilizados no controlador robusto.

Neste tambor, as variáveis controladas serão pressão e nível e as variáveis manipuladas serão vazão de vapor pelo topo e vazão de líquido pelo fundo. A Figura X-1 mostra um fluxograma básico onde são indicadas as variáveis envolvidas no controle feito pelo IHRMPC.



**Figura X-1– Fluxograma de controle do tambor de Flash**

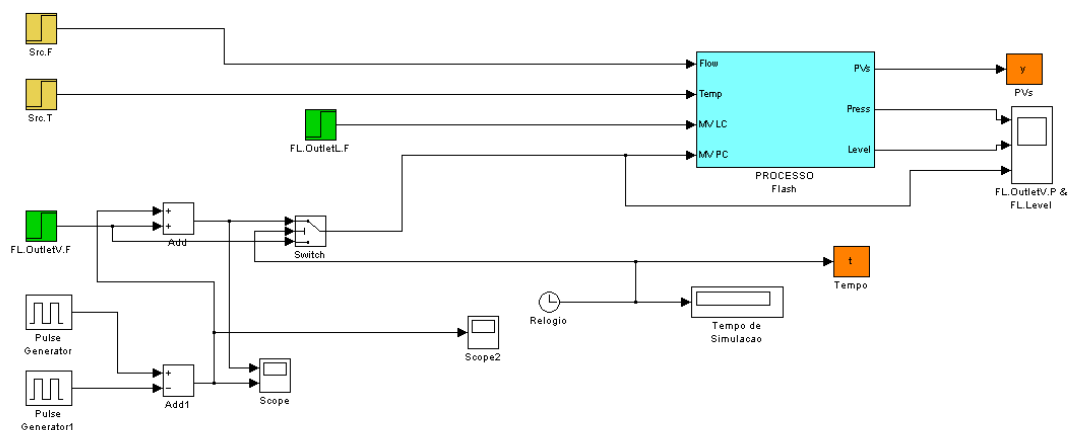
Inicialmente foi desenvolvida a interface entre o *Simulink* do Matlab e o EMSO para a identificação do processo, conforme indicado na Figura X-2. Para a identificação dos modelos foi utilizada a função ARX do Matlab. Durante esta fase, foi percebido que o ARX não identifica corretamente o processo quando o passo de integração do modelo for variável. Por isso, na configuração do *Simulink* do Matlab foi utilizado o passo de integração fixo em 1.

Para efeitos de uma pré-identificação, aplicou-se uma sequência de pulsos a este sistema na vazão de vapor e na vazão de líquido, conforme indicados na Figura X-3 e na Figura X-4, onde, para o vapor, foi aplicada uma oscilação de 16 mols por segundo com período de 3000 segundos e, para o líquido, uma oscilação de 50 mols por segundo, com período de 2000 segundos. Esses períodos e amplitudes de oscilação foram escolhidos de forma a não gerar erros durante a simulação do tambor no EMSO.

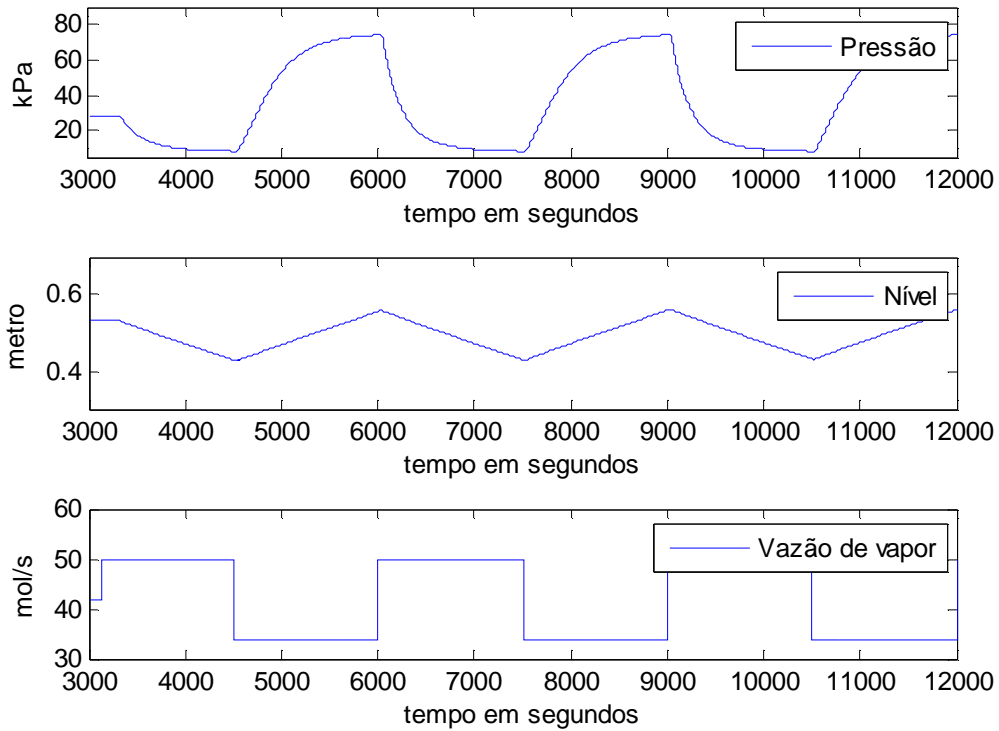
Percebe-se que a variável pressão não se comporta como uma variável integradora em relação às variáveis manipuladas, como inicialmente poderia ser esperado, pois, em um sistema sem condensação, a variação de pressão está associada a um balanço simples de massa. No caso do tambor estudado, existe condensação, o que influencia no valor da pressão, O seu comportamento apresenta uma dinâmica de primeira ordem. Já a variável nível é integradora em relação às duas variáveis manipuladas.

Para a perturbação na vazão de vapor, podem-se notar dois ganhos diferentes do processo na variável estável, pressão do tambor, conforme o aumento ou a diminuição da vazão de vapor. A variável integradora, nível do tambor, apresenta um comportamento único.

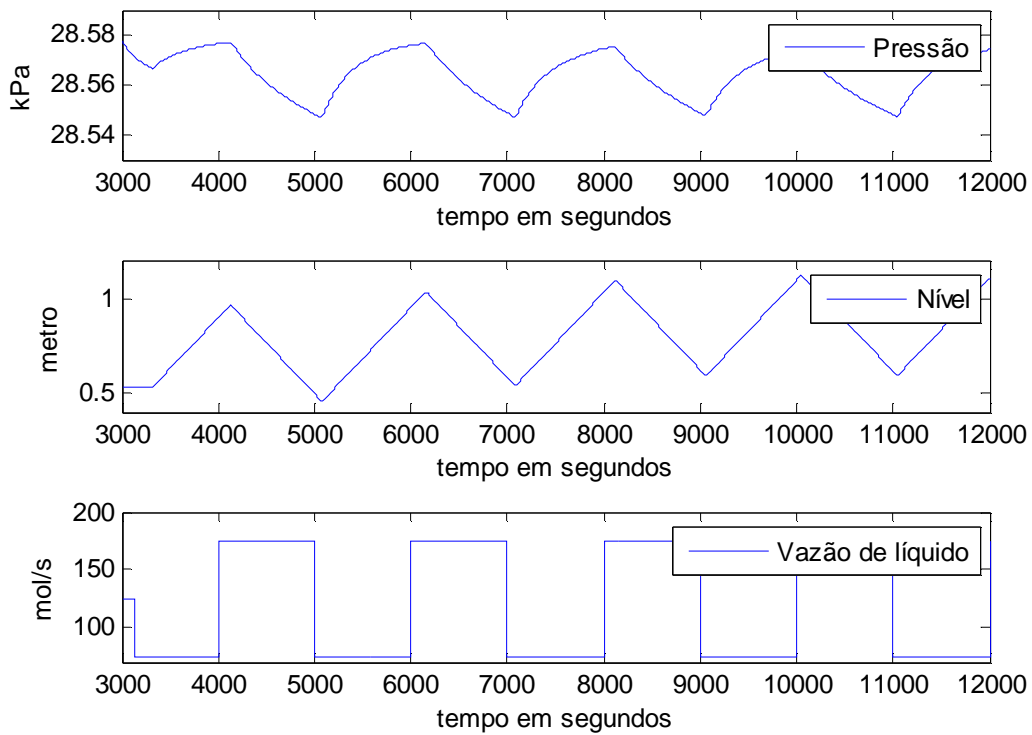
Para a perturbação na vazão de líquido, pode-se notar que a variável pressão é muito pouco influenciada, enquanto que a variável nível sofre uma forte influência. Também se pode observar que, para esta variável manipulada, os ganhos das duas variáveis controladas não se alteram para acréscimo ou decréscimo de vazão .



**Figura X-2– Ambiente simulink para identificação do modelo do processo para a variável manipulada vazão de vapor**



**Figura X-3– Resposta das variáveis controladas às variações aplicadas à vazão de retirada de vapor**

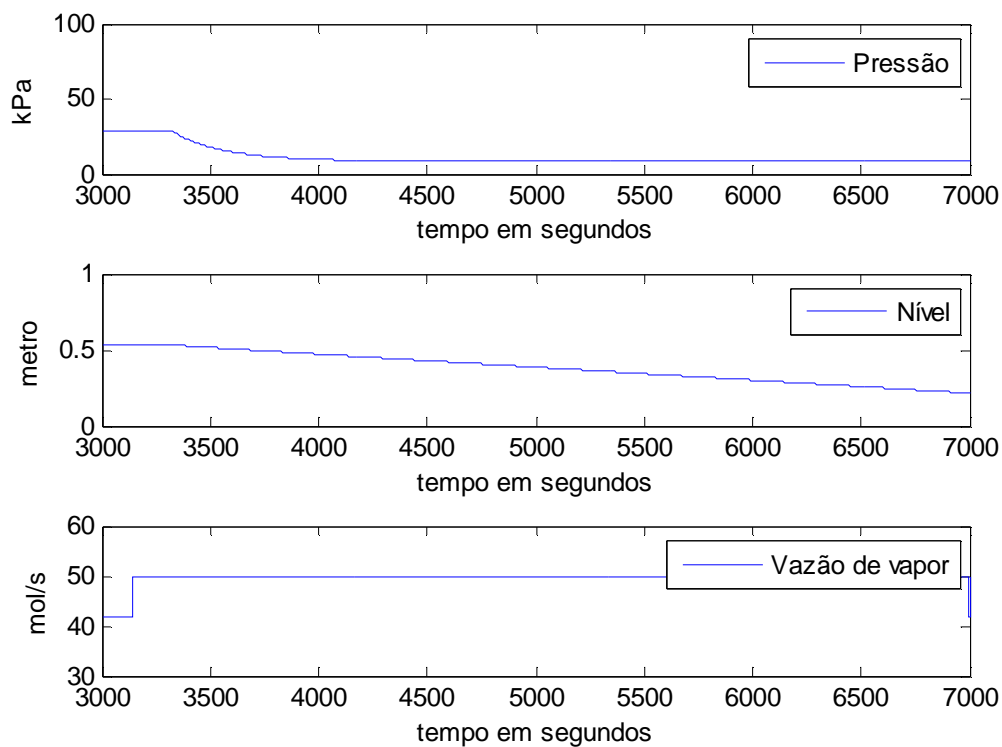


**Figura X-4– Resposta das variáveis controladas às variações aplicadas à vazão de retirada de líquido**

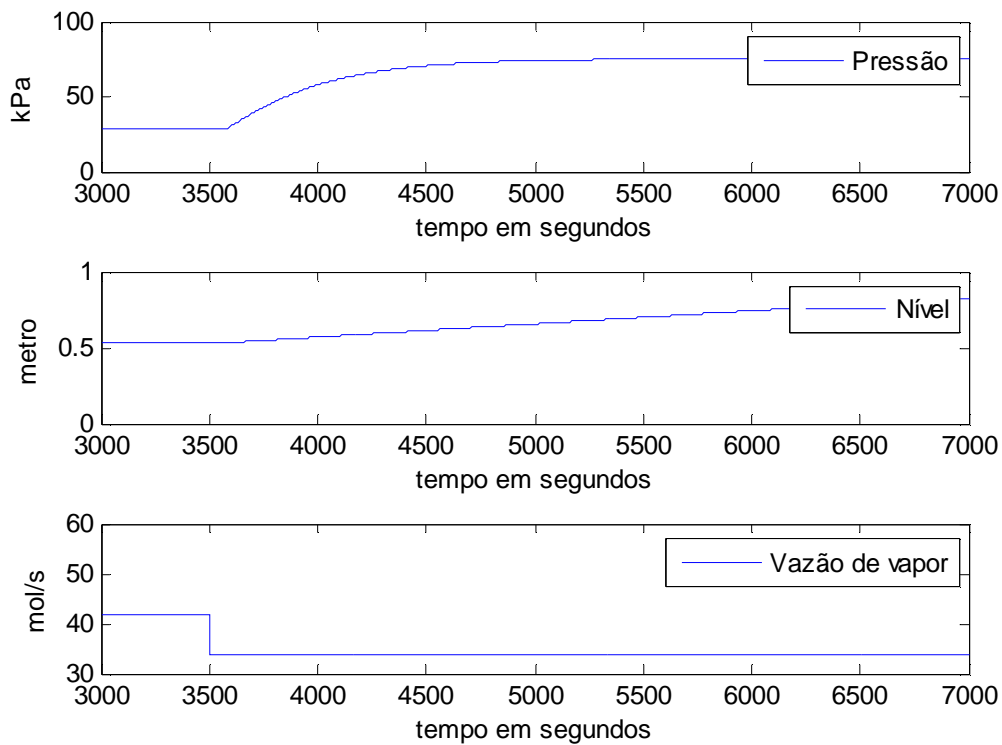
### X.3.1. Fase de Identificação com a vazão de vapor

Para esta identificação foram aplicados ao processo um degrau positivo e um degrau negativo, de amplitude 8 mols por segundo, 19% em relação ao valor de regime estacionário, sobre a vazão de vapor no topo do tambor, mantendo a vazão de retirada de líquido constante. O resultado destas perturbações no processo pode ser visto na Figura X-5 e na Figura X-6.

Essas duas respostas geraram dois modelos utilizando a função ARX do Matlab, Estes modelos, tratados como modelo A e modelo B, são mostrados nas equações (X-1) e (X-2) e nas equações (X-3) e (X-4), respectivamente. O período de amostragem utilizado foi de 50 segundos, um intervalo adequado para a utilização do controle preditivo multivariável na indústria.



**Figura X-5– Resposta das variáveis controladas a um degrau positivo na vazão de vapor**



**Figura X-6– Resposta das variáveis controladas a um degrau negativo na vazão de vapor**

$$y_1(s) = \frac{-9,162e-006}{s} u_1(s) \quad (\text{X-1})$$

$$y_2(s) = \frac{-0,09436s - 0,003964}{s^2 + 0,006119s + 1,576e-005} u_1(s) \quad (\text{X-2})$$

$$y_1(s) = \frac{-1,065e-005}{s} u_1(s) \quad (\text{X-3})$$

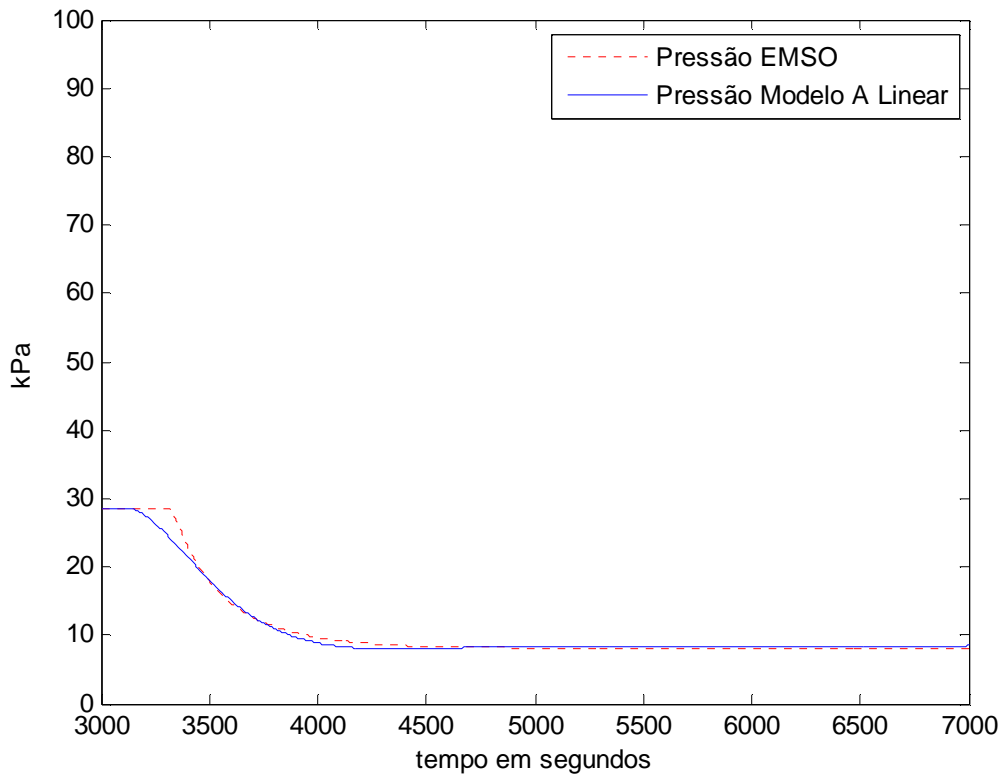
$$y_2(s) = \frac{-0,3749s - 0,01678}{s^2 + 0,01344s + 2,874e-005} u_1(s) \quad (\text{X-4})$$

- $y_1$  - Variável de controle Nível
- $y_2$  - Variável de controle Pressão
- $u_1$  - Variável manipulada vazão de retirada de vapor

Pode-se observar que o ganho para a variável estável variou de 250 para 584 e que o modelo da variável integradora pouca alteração sofreu. Desta forma, esta variação na

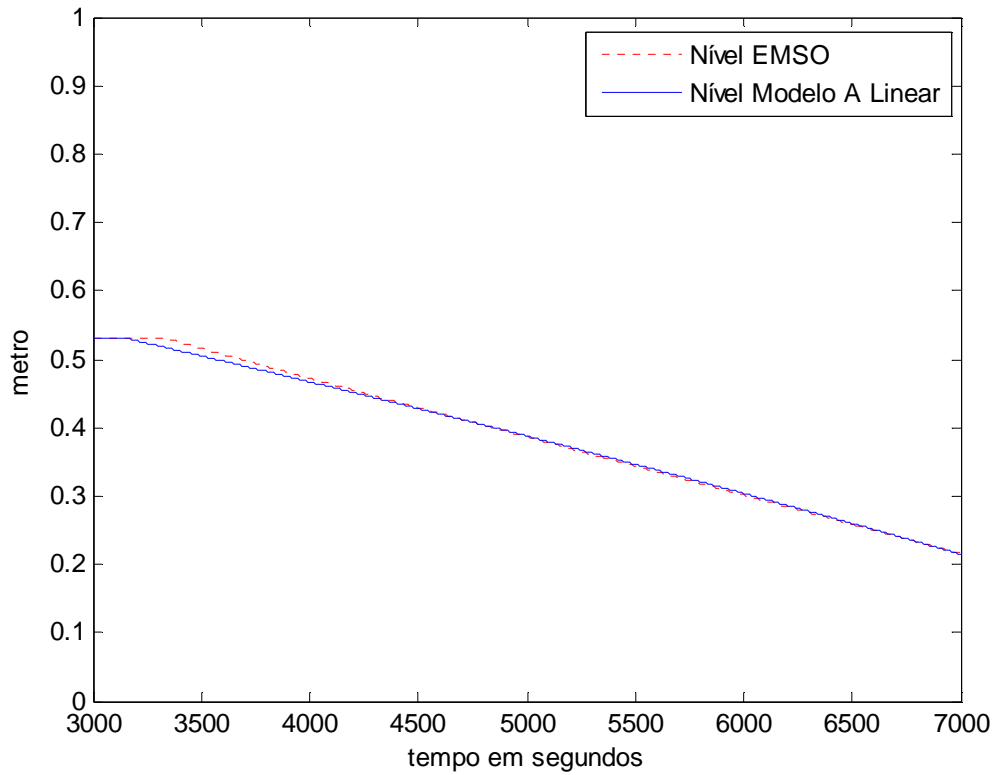
variável de pressão será aqui tratada como uma incerteza de modelo.

Os modelos levantados pelo ARX do Matlab podem ser comparados com as respostas, à mesma excitação, fornecidas pelo simulador EMSO. Pode-se perceber que os modelos A e B apresentam melhor resposta para a situação em que foram levantados, ou seja, o modelo A apresenta uma melhor resposta ao degrau positivo enquanto que o modelo B apresenta uma melhor estimativa para um degrau negativo. A Figura X-7, Figura X-8, Figura X-9 e Figura X-10 mostram os resultados obtidos nesta comparação para o degrau positivo, enquanto que a Figura X-11, Figura X-12, Figura X-13 e a Figura X-14 mostram o resultado para um degrau negativo.

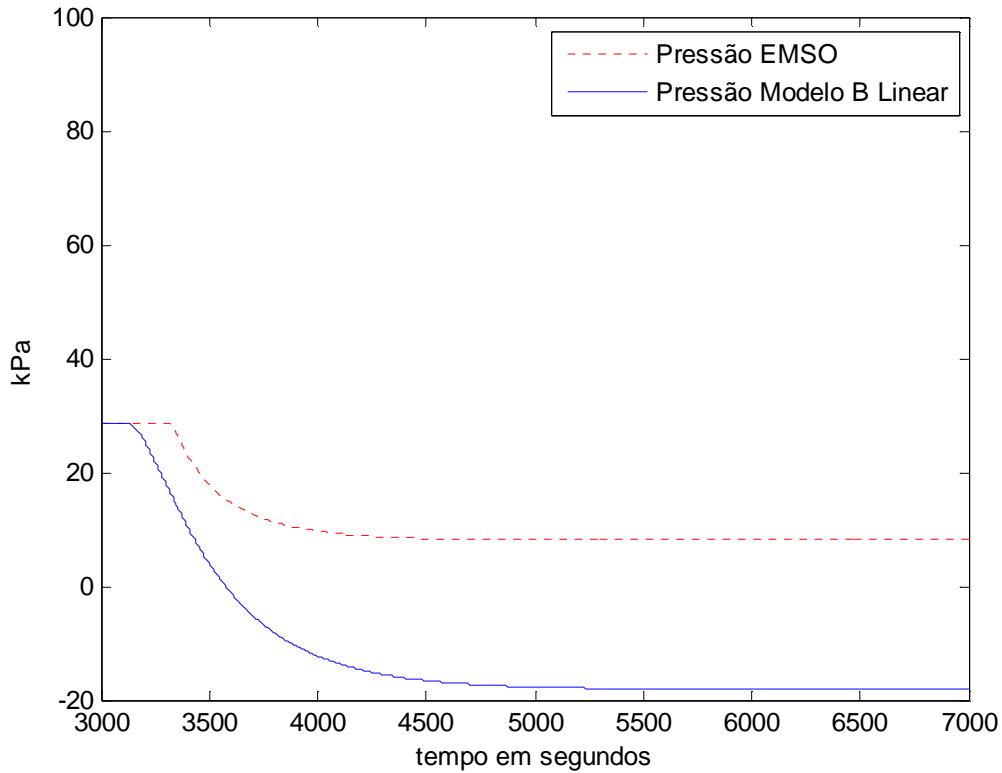


**Figura X-7– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo A e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor**

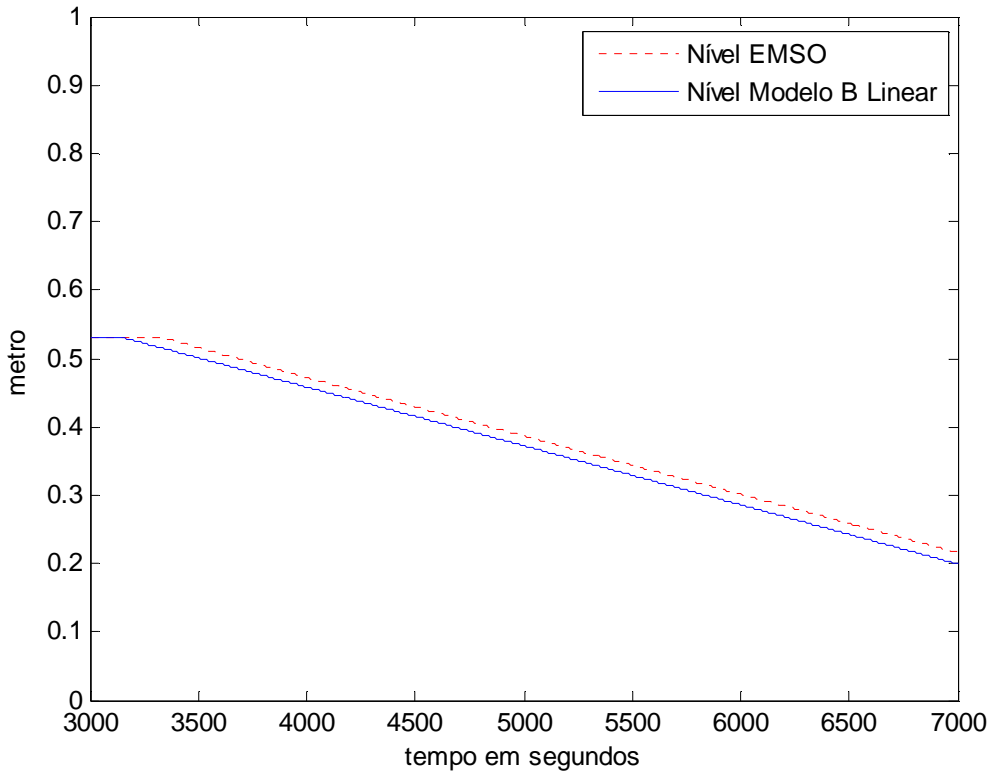




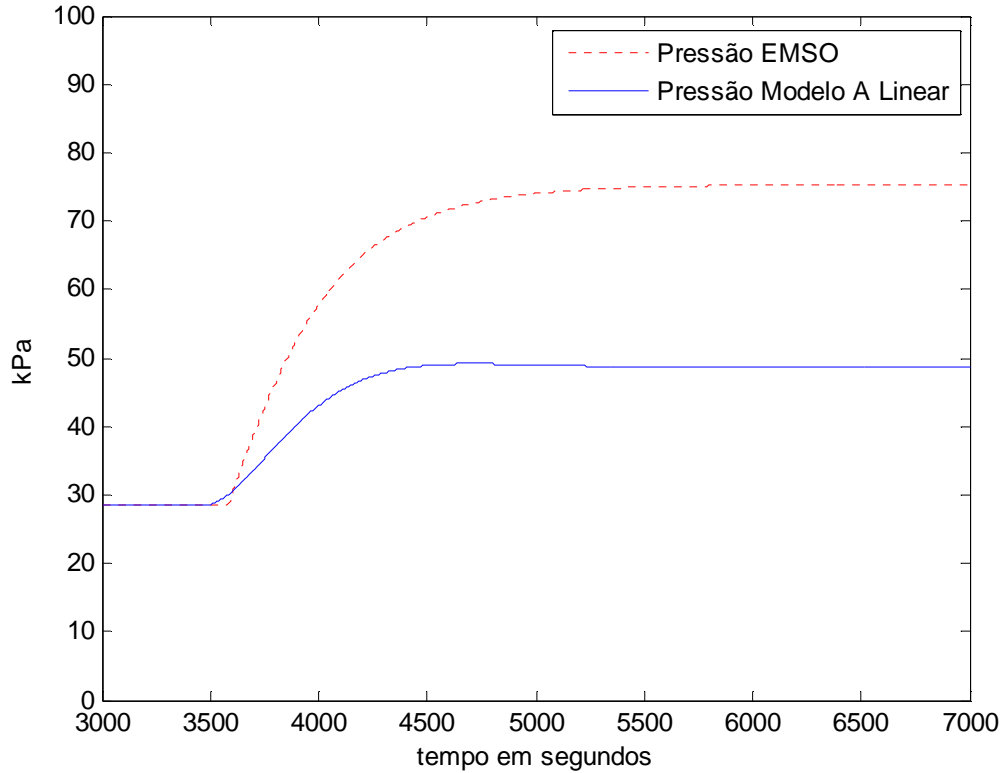
**Figura X-8– Comparação da resposta da variável Nível Modelo A e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor**



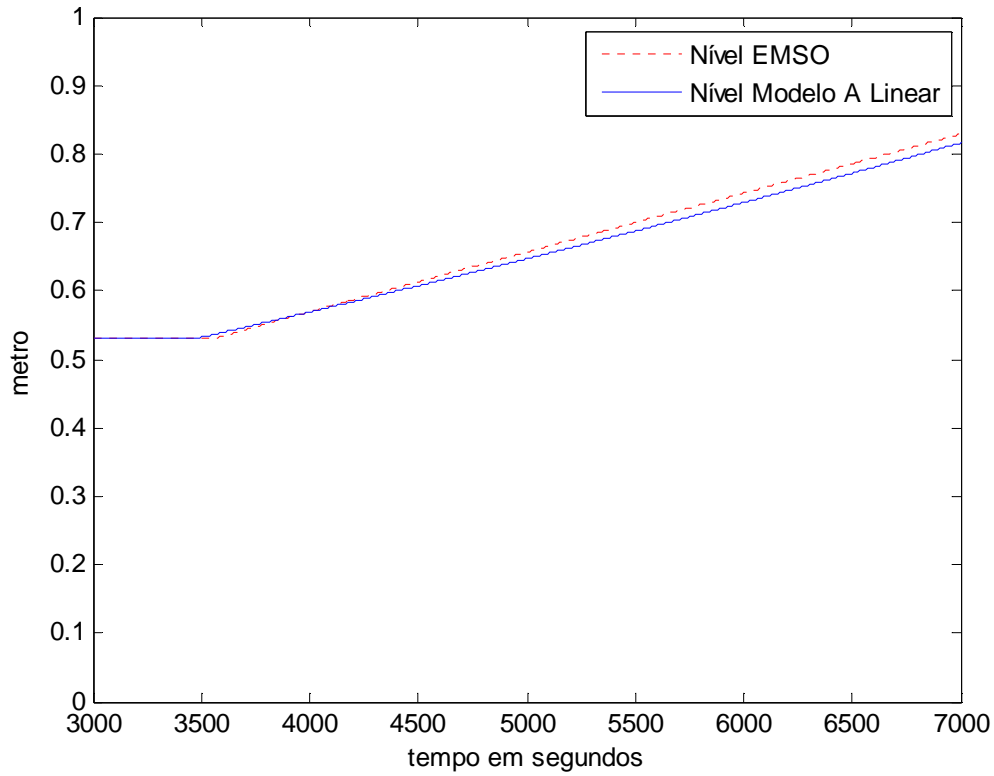
**Figura X-9– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo B e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor**



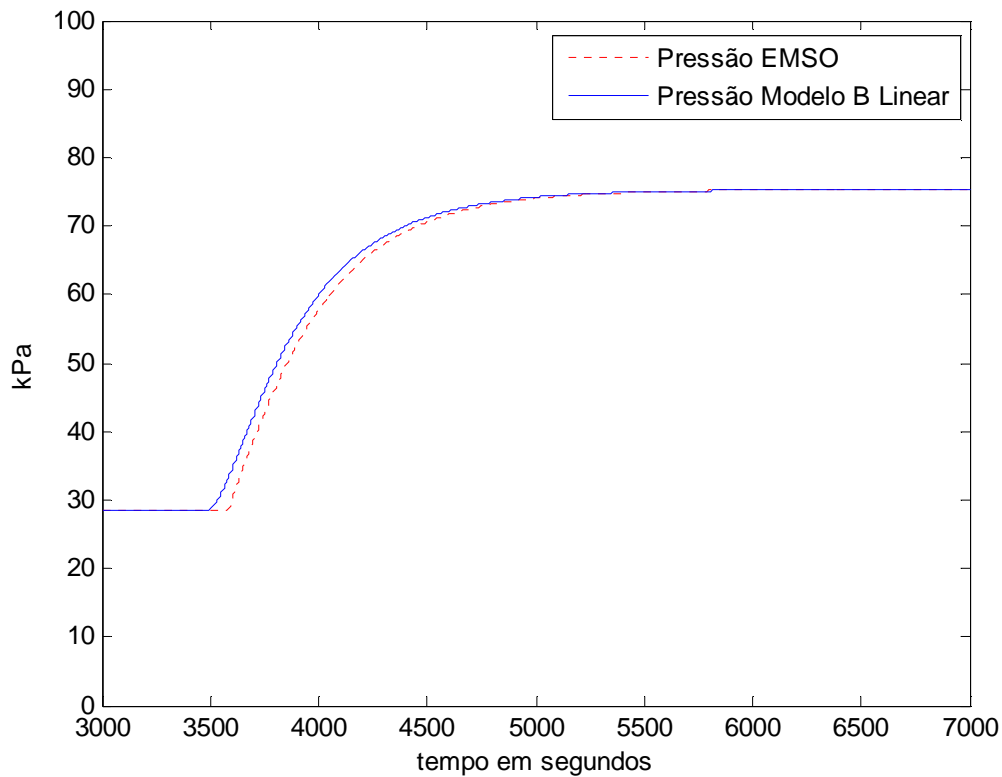
**Figura X-10– Comparação da resposta da variável Nível Modelo B e EMSO a um degrau positivo na vazão de vapor**



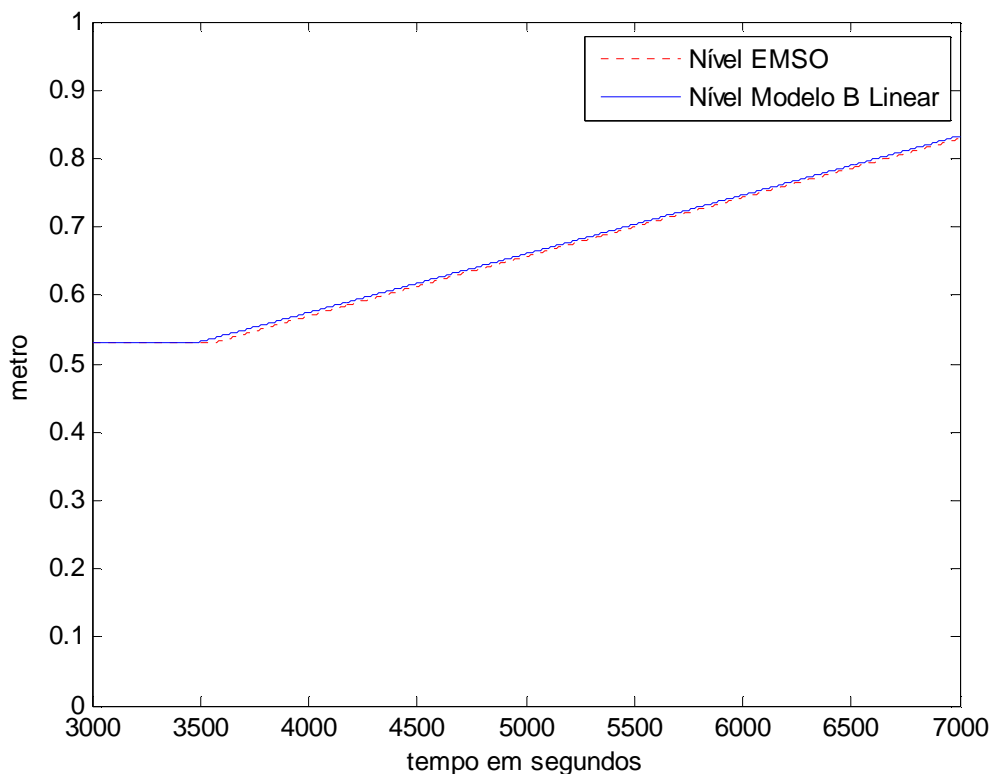
**Figura X-11– Comparação da resposta da variável Pressão Modelo A e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor**



**Figura X-12– Comparação da variável Nível Modelo A e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor**



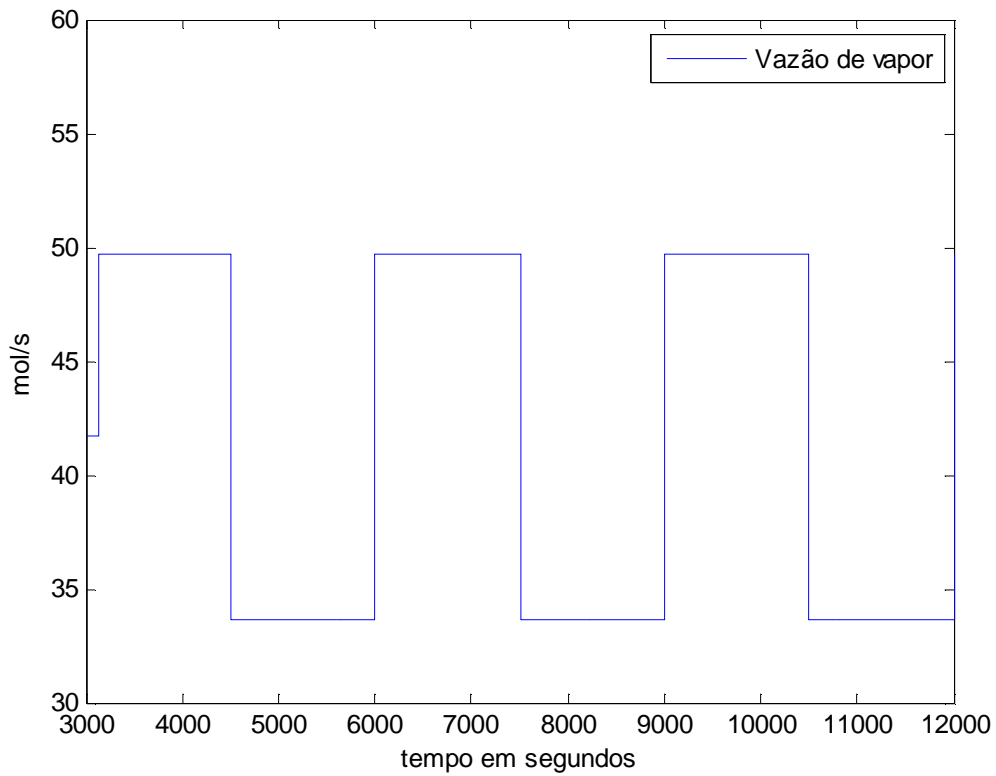
**Figura X-13– Comparação da variável Pressão Modelo B a um degrau negativo na vazão de vapor**



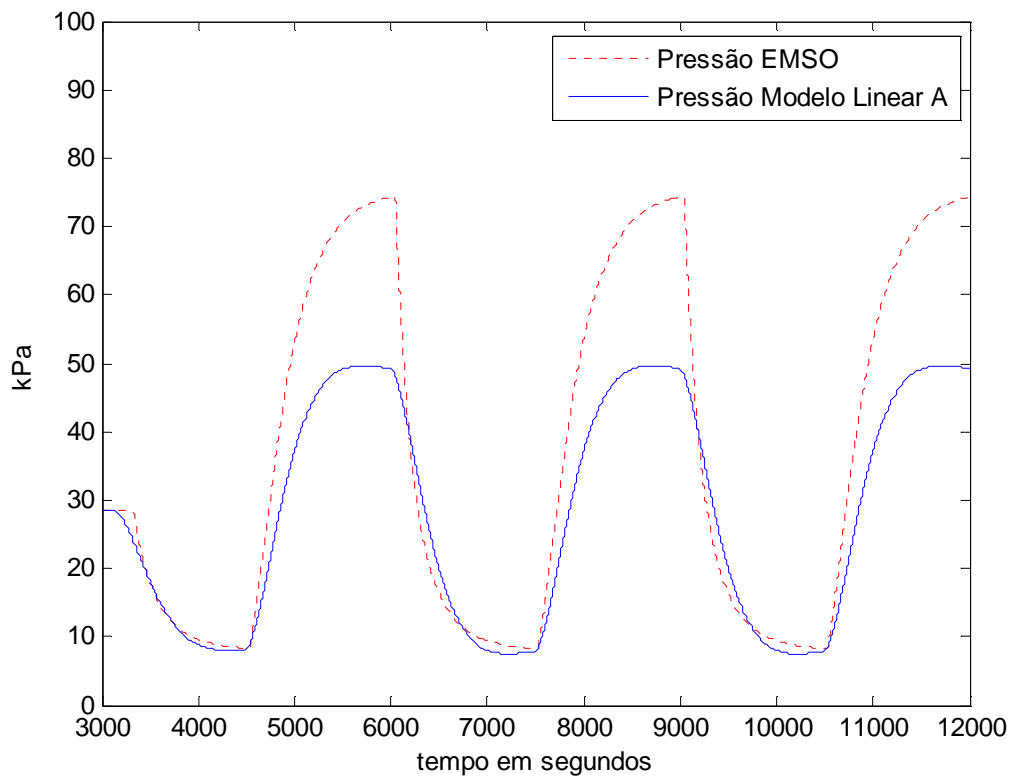
**Figura X-14– Comparação da resposta da variável Nível Modelo B e EMSO a um degrau negativo na vazão de vapor**

Esta identificação também pode ser validada, para os dois modelos, por uma sequência de pulsos, de mesma amplitude e período de 3000 segundos, aplicados ao processo, conforme mostra Figura X-15. O objetivo desta nova validação será de verificar como os modelos obtidos se comportam com uma excitação diferente da excitação original que gerou os mesmos.

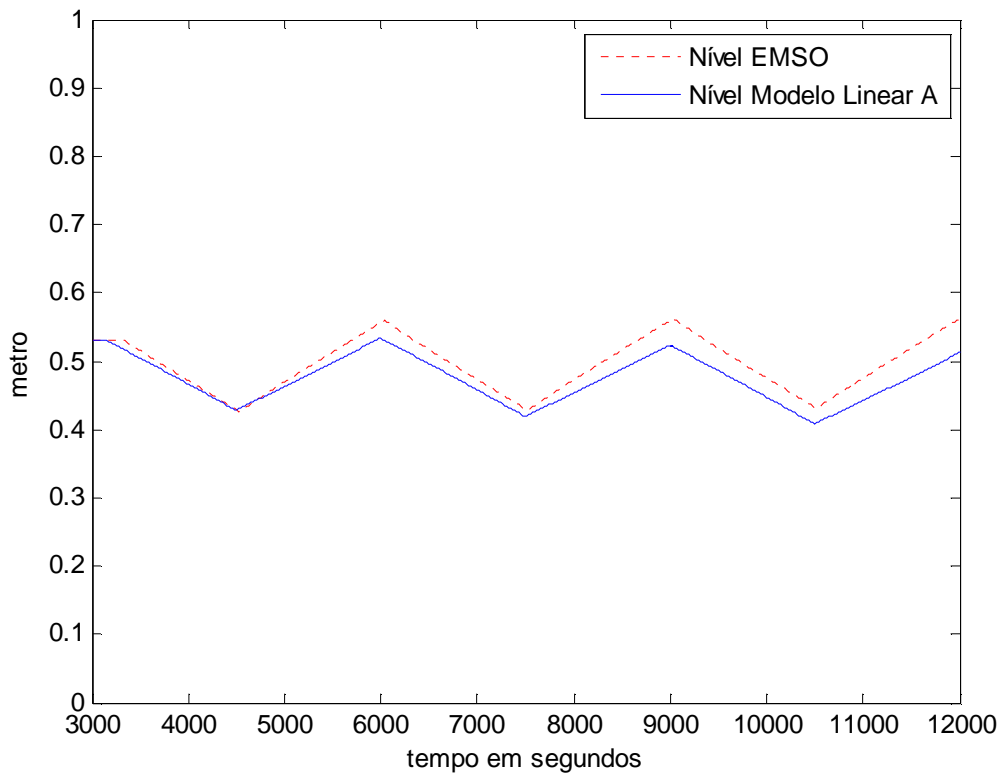
O resultado, comparando os resultados das variáveis de saída do processo com as variáveis de saída dos modelos lineares desenvolvidos pelo ARX, pode ser visto na Figura X-16, Figura X-17, Figura X-18 e na Figura X-19. Pode-se perceber que o modelo A representa melhor o ganho do processo nos aumentos de vazão de vapor, que correspondem a uma redução de pressão do tambor, enquanto que o modelo B representa melhor o processo quando ocorre redução da vazão de vapor, o que significa um aumento de pressão no tambor. Estes dois modelos obtidos serão considerados pelo IHRMPC.



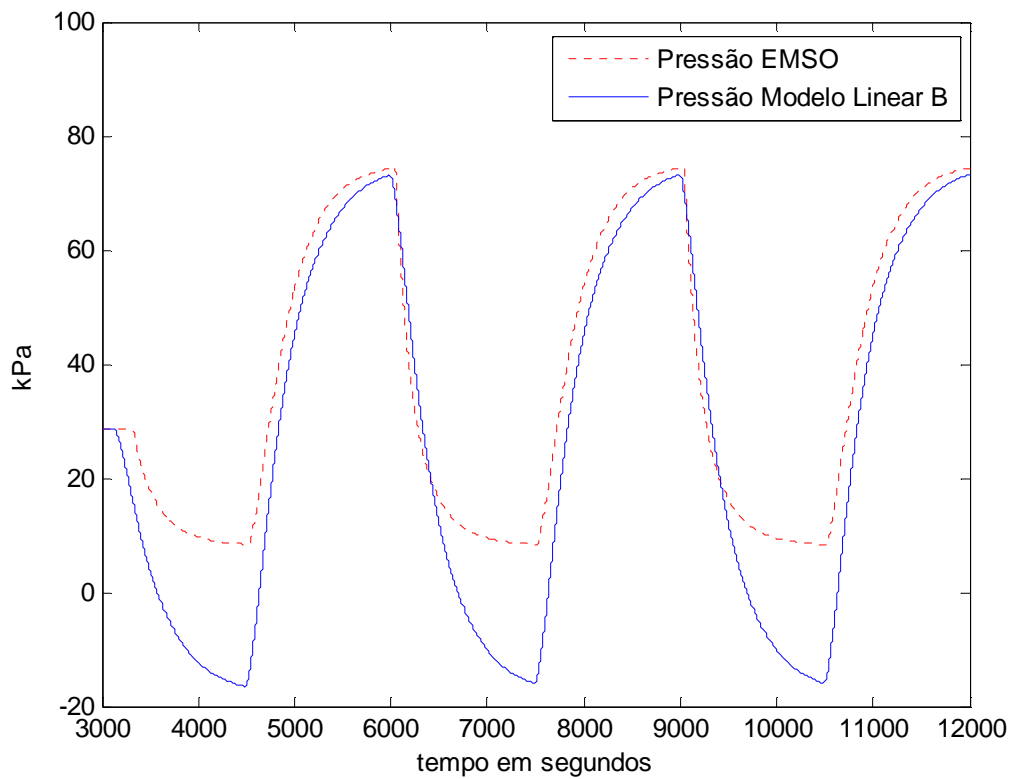
**Figura X-15– Excitação aplicada na vazão de vapor**



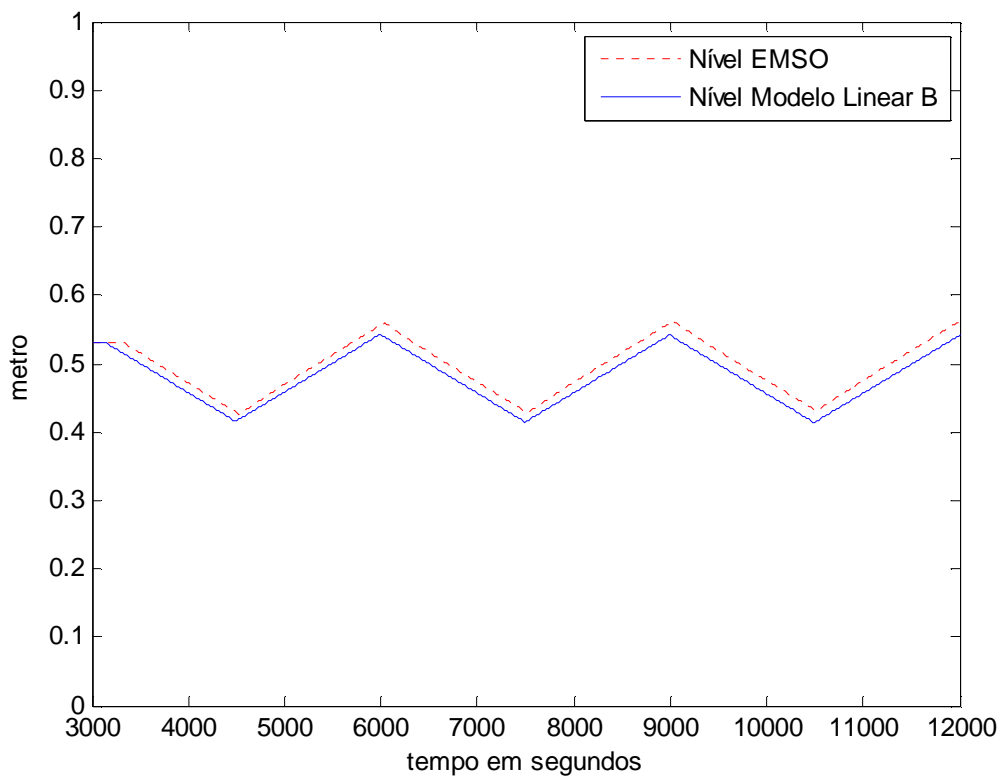
**Figura X-16– Resposta da variável controlada Pressão para o modelo A à excitação na vazão de vapor**



**Figura X-17– Resposta da variável controlada Nível para o modelo A à excitação na vazão de vapor**



**Figura X-18– Resposta da variável controlada Pressão para o modelo B à excitação na vazão de vapor**



**Figura X-19– Resposta da variável controlada Nível para o modelo B à excitação na vazão de vapor**

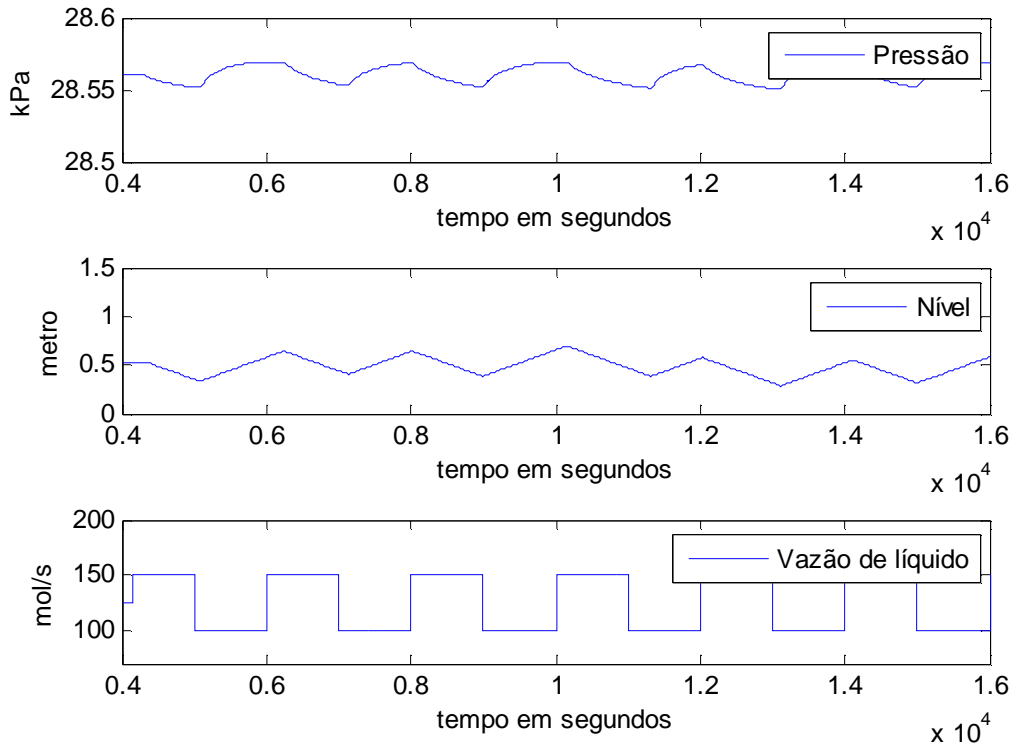
Adotando-se como índice de desempenho  $IC$  da representação do modelo o somatório dos erros ao quadrado em relação ao valor estacionário, normalizados por este valor, conforme equação (X-5), pode-se observar que o modelo B representou melhor a parte integradora do processo,  $IC$  de 8,9, do que o modelo A,  $IC$  de 19,03. Desta forma, o modelo B será o modelo escolhido para a variável integradora.

$$IC = \sum_{i=0}^{Tsim} \left[ \frac{(y - y_p)^2}{y_{ss}} \right] \quad (X-5)$$

- $y_{ss}$  - Valor em estado estacionário da variável controlada
- $y$  - Valor real da variável controlada
- $y_p$  - Valor estimado da variável controlada
- $Tsim$  - Tempo de simulação
- $IC$  - Soma de erros normalizados ao quadrado

### X.3.2. Fase de Identificação com a vazão de líquido

Para a identificação da variável manipulada vazão de retirada de líquido do tambor de *flash* foi aplicada ao processo uma sequência de pulsos de amplitude de 25 mols por segundo que corresponde a 20 % do valor de regime estacionário.



**Figura X-20– Resposta das variáveis controladas para uma excitação na vazão de líquido**

O modelo obtido com a função ARX do Matlab é indicado em (X-6) e (X-7). O período de amostragem utilizado corresponde a 50 segundos.

$$y_1(s) = \frac{-8,681e-006}{s} e^{-50s} u_2(s) \quad (\text{X-6})$$

$$y_2(s) = \frac{-1,576e-006s - 3,176e-006}{s^2 + 0,0453s + 0,0001077} e^{-50s} u_2(s) \quad (\text{X-7})$$

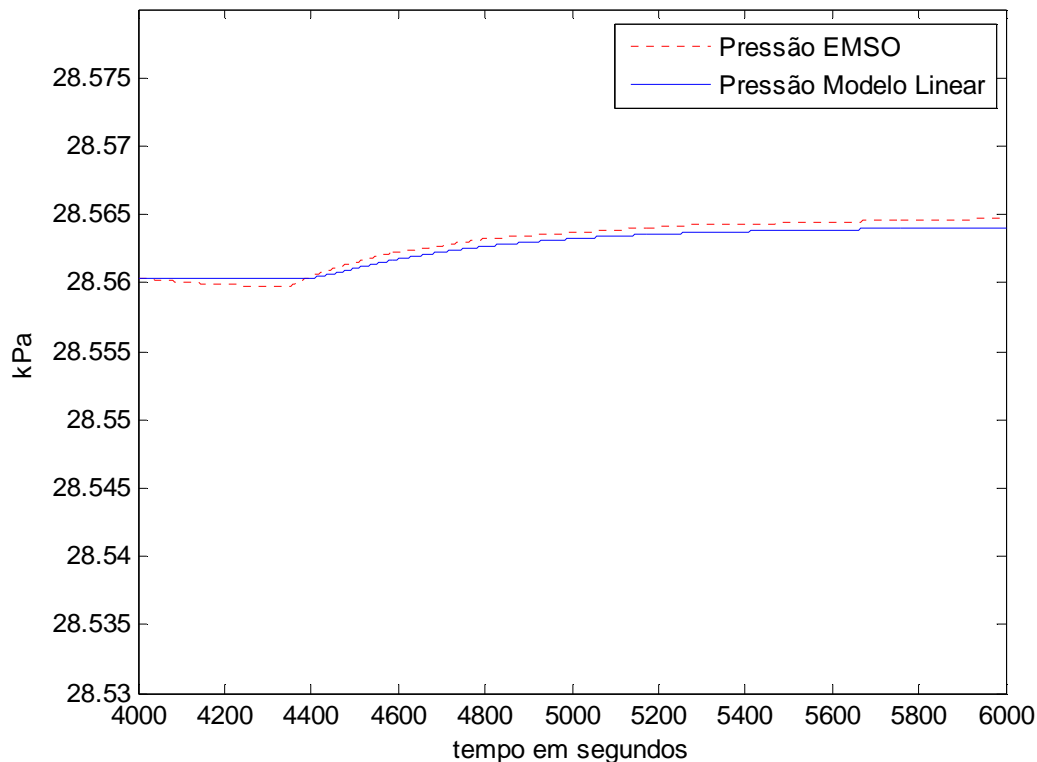
- $y_1$  - Variável de controle Nível
- $y_2$  - Variável de controle Pressão
- $u_2$  - Variável manipulada vazão de retirada de líquido

O modelo expresso em (X-7) mostra que, para este tambor estudado, a variável

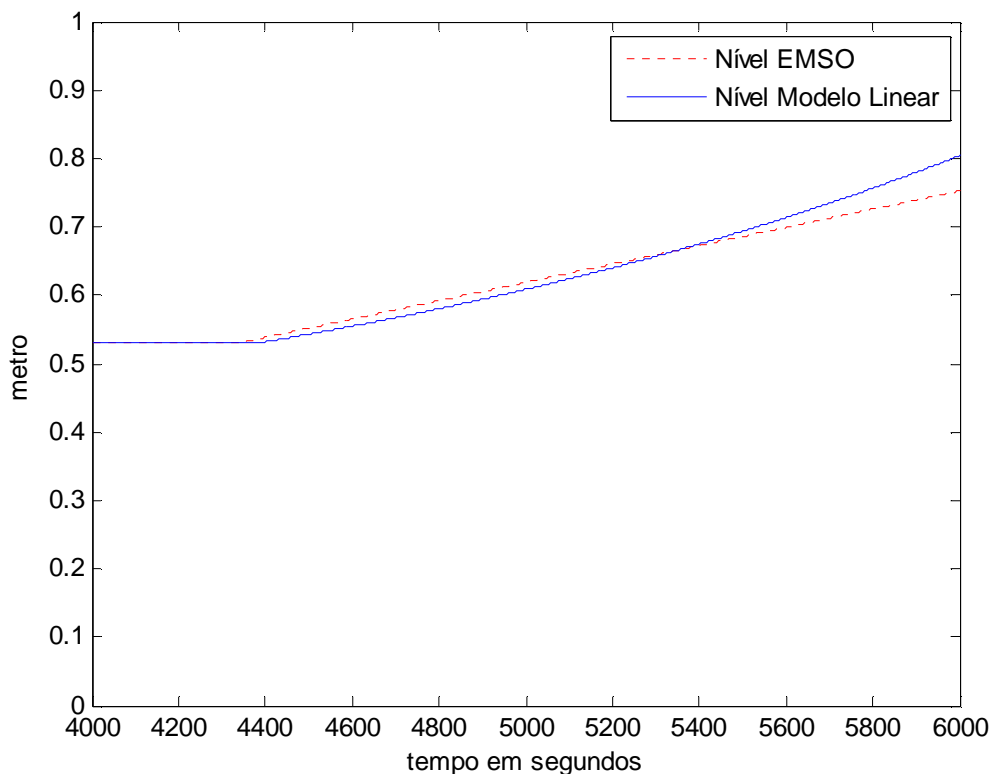


controlada pressão é pouco afetada pela variável manipulada vazão de líquido. Isso pode ser visto pelo pequeno. ganho estacionário obtido.

Esta identificação foi validada, desta vez, por um degrau negativo, no valor de 12,5 mols por segundo, correspondente a 10% do valor em regime permanente desta variável manipulada, aplicado no instante correspondente a 4000 segundos. A Figura X-21 e a Figura X-22 mostram que este modelo aproxima a resposta do tambor de *flash* simulado no EMSO, aumentando um pouco o erro no caso do nível a medida que o tempo vai passando.



**Figura X-21– Comparação entre o modelo linear obtido e a resposta do simulador EMSO a um degrau negativo na vazão de retirada de líquido**



**Figura X-22– Comparação entre o modelo linear obtido e a resposta do simulador EMSO a um degrau negativo na vazão de retirada de líquido**

#### **X.4. MALHA FECHADA TAMBOR DE FLASH E IHRMPC**

O controlador IHRMPC foi configurado com os modelos descritos em **(X-1)**, **(X-2)**, **(X-4)**, **(X-6)** e **(X-7)**. Para evitar problemas numéricos, a pressão foi normalizada para o intervalo de 0 a 100000 Pa e suas indicações nos gráficos, apenas por conveniência e para compatibilização com unidades industriais, foram indicadas em kPa.

Para uma melhor avaliação dos resultados obtidos, foi criado um índice de desempenho que representa uma soma quadrática dos desvios das variáveis em relação ao *set point*, e normalizadas em relação a este valor de referência.

$$ID = \sum_{i=0}^{Tsim} \left[ \left( \frac{y - y_{sp}}{y_{sp}} \right)^2 \right] \quad \text{(X-8)}$$

- $y_{sp}$  - Valor desejado da variável controlada
- $y$  - Valor real da variável controlada

A sintonia proposta para o controlador está indicada na Tabela X-1.

**Tabela X-1 – Parâmetros de sintonia do IHRMPC para o tambor de flash**

Descrição	Simbologia	Valor
Período de amostragem	$T$	50
Horizonte de controle	$m$	20
Horizonte de controle estendido para a variável integradora	$n$	15
Horizonte de controle estendido para a variável estável	$n_s$	17
Peso da variável nível	$Q$	100
Peso da variável pressão	$Q_s$	1
Fator de supressão	$R$	[0,15 0,005]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S_1$	[10000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do processo	$S_2$	[10000]
Peso nas folgas dos polos instáveis do modelo	$S_{1,s}$	[10000]
Limitação máxima das entradas	$u_{\max}$	[1250 1250]
Limitação mínima das entradas	$u_{\min}$	[-41,667 -125]
Limitação dos incrementos das entradas	$\Delta u_{\max}$	[20 40]

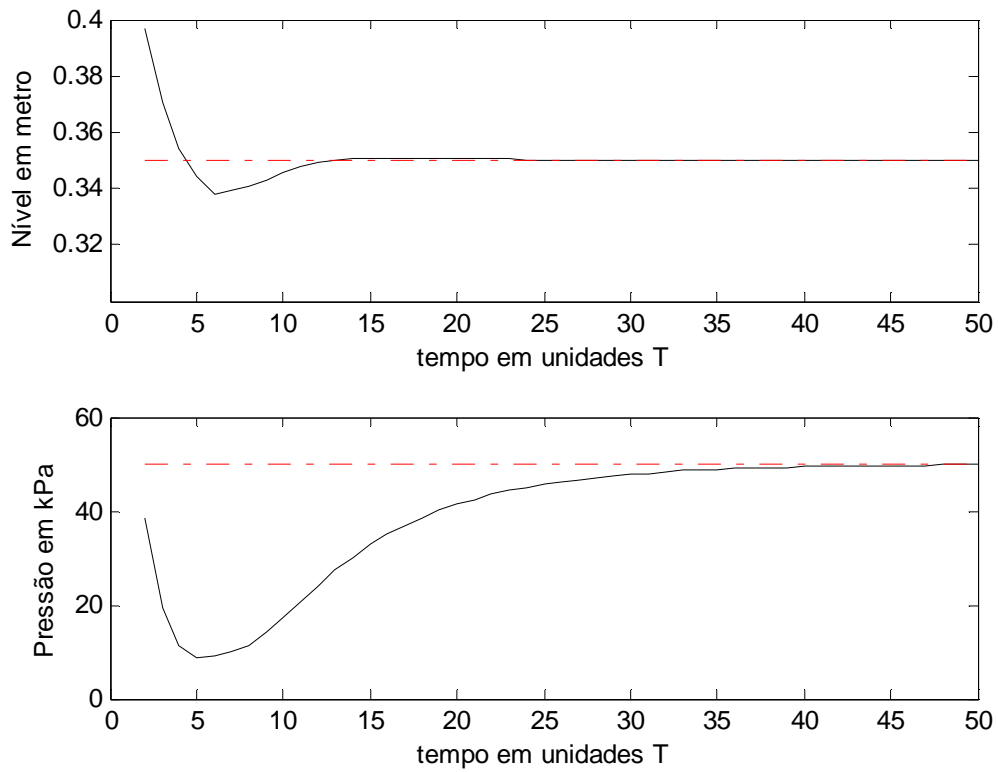
Na sequência, foi aplicado um degrau simultâneo aos *set points* das variáveis controladas nível e pressão, passando dos valores de 0,42 m e 67 kPa,

respectivamente, aos valores 0,35 m e 50 kPa, esta última variável de controle normalizada. A Figura X-23 mostra o comportamento das saídas envolvidas e a Figura X-24 mostra as variáveis manipuladas pelo controlador. Observe que, de forma proposital, o processo não se encontra em estado estacionário no momento do início da simulação. O objetivo é de verificar o desempenho do controlador para atingir seus *set points* em um processo que não está em equilíbrio. O índice de desempenho *ID*, conforme a equação **(X-8)**, obtido para a variável nível foi 0,0638 e para a variável pressão 6,1086.

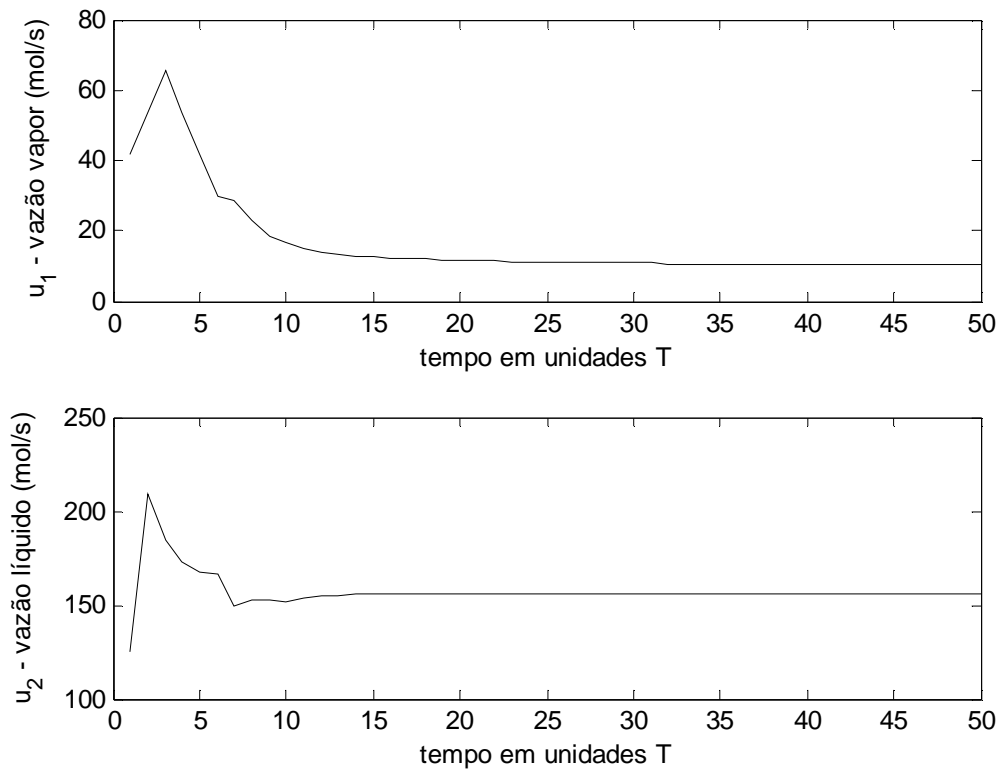
A Figura X-25 e a Figura X-26 mostram as respostas das variáveis controladas e manipuladas a uma perturbação de 20% na vazão de entrada do tambor de *flash*, ocorrida no instante 100 unidades T da simulação. Conforme a equação **(X-8)**, o índice de desempenho *ID* obtido para a rejeição desta perturbação foi de 0,3366 para a variável nível e de 0,0033 para a variável pressão.

Foi simulada uma nova perturbação ao tambor de *flash*, agora na temperatura da corrente de entrada, onde esta perturbação sofreu um aumento de 10% no instante de simulação 100 unidades, conforme Figura X-27 e Figura X-28. O índice de desempenho *ID* obtido para a rejeição desta perturbação foi de 0,0039 para a variável nível e de 2,3920 para a variável pressão.

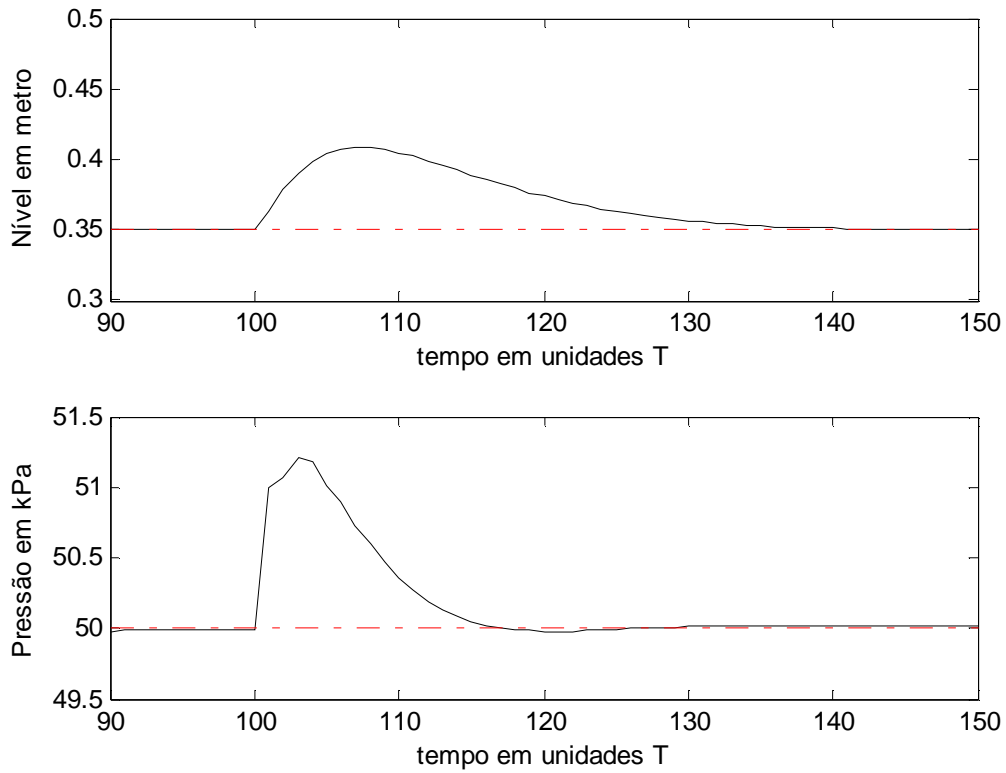
Em ambas as situações de perturbação no tambor, o controlador IHRMPC rejeitou estas variações na carga da mesma, com boa eficiência e sem *overshoot*.



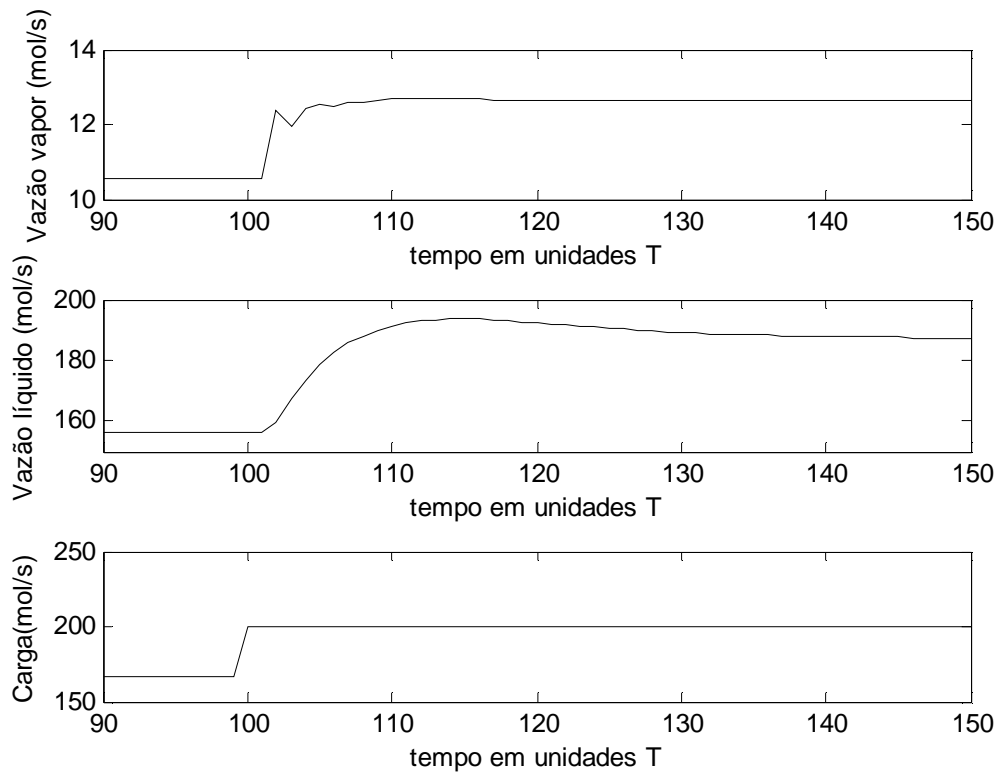
**Figura X-23– Resposta do modelo com controlador IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão**



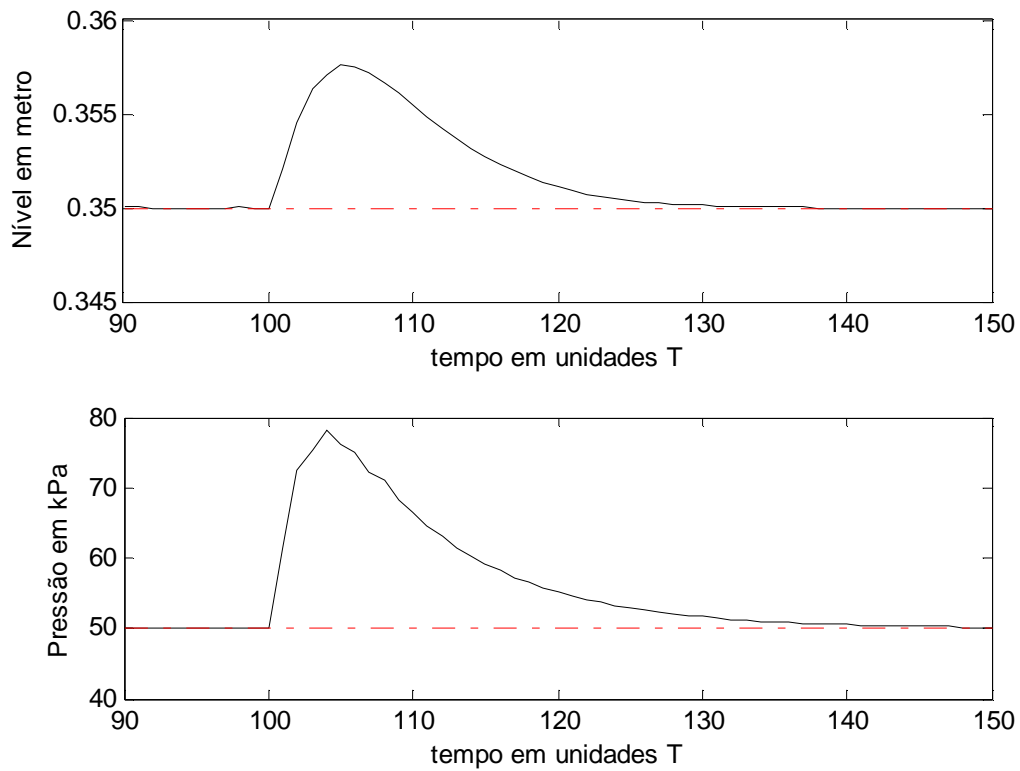
**Figura X-24– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão**



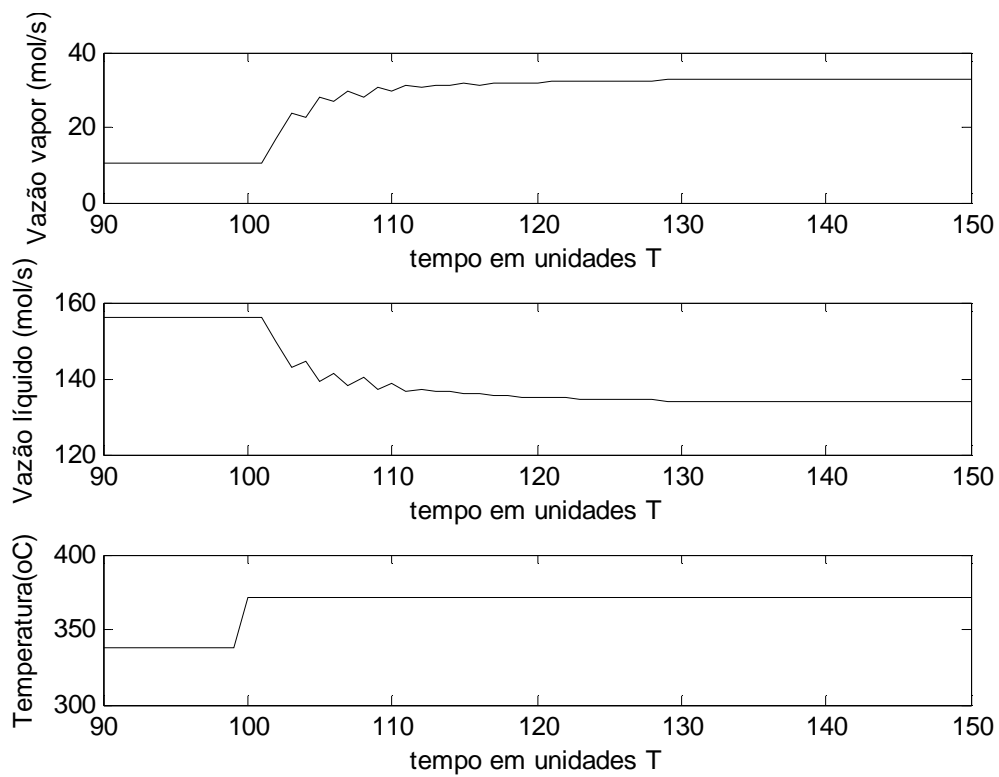
**Figura X-25– Resposta do modelo com controlador IHRMPC do nível e da pressão frente a uma perturbação na vazão de carga de 20%**



**Figura X-26– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador IHRMPC frente a uma perturbação na vazão de carga de 20%**



**Figura X-27– Resposta do modelo com controlador IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10%**



**Figura X-28– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controlador HRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10%**

## **X.5. COMPARAÇÃO DOS CONTROLADORES IHRMPC E PID NO TAMBOR DE FLASH**

Para uma avaliação da performance do controlador proposto neste trabalho, foram implementados no ambiente do Matlab dois controladores PID incrementais, interativos e paralelos. Estes controladores interagiram com o simulador EMSO no mesmo intervalo de tempo T do IHRMPC.

O primeiro PID controla o nível manipulando a vazão de retirada de líquido do fundo do tambor. O segundo PID controla a pressão, manipulando a vazão de retirada de vapor do topo do tambor. Os métodos de sintonia utilizados para estes controladores foram o método do modelo interno, IMC, proposto por RIVERA ET AL. (1986), para a pressão e o método proposto por FRIEDMAN (1994), com uma variação heurística adaptada pelo CENPES para o controlador de nível. Estas sintonias foram escolhidas por se tratarem de métodos amplamente utilizados nas unidades industriais. A Tabela X-2 indica os valores encontrados nesta etapa de trabalho de sintonia dos controladores para cada uma das variáveis controladas do sistema estudado.

**Tabela X-2 – Parâmetros de sintonia dos PIDs para o tambor de flash**

Descrição	Unidade	Valor
Ganho do LIC	%/m	600
Tempo de Integral do LIC	s	500
Tempo Derivativo do LIC	s	0
Ganho do PIC	%/Pa	78,4
Tempo de Integral do PIC	s	249
Tempo Derivativo do PIC	s	0

O índice utilizado para validar esta comparação foi o mesmo indicado na equação (X-8).

### ***X.5.1. Comparação IHRMPC com PID no problema servo***

O problema inicialmente estudado foi o problema servo, onde uma variação de *set*



*point*, tanto para o nível, como para a pressão, nos valores de 0,35 m e 50 kPa foi solicitada no instante 2000 (40\*T).

A Figura X-29 mostra a performance obtida pelos dois controladores PID e pelo IHRMPC para as variáveis controladas, enquanto que a Figura X-30 mostra como as variáveis de vazão de saída são manipuladas por estes controladores. Para o PID que controla o nível, o índice de desempenho *ID* obtido foi de 6,9071 enquanto que para o PID que controla a pressão, o *ID* obtido foi de 5,3842. Para o IHRMPC, estes índices ficaram em 0,9575 e 7,6347, respectivamente.

Considerando os índices de desempenho, pode-se afirmar que o PID de pressão apresentou um desempenho 40% superior ao do IHRMPC. Isto pode ser explicado pelo fato de que, conforme os modelos obtidos, durante a fase de identificação, a pressão é muito pouco afetada pela variável manipulada vazão de retirada de líquido neste tambor de *flash*. Desta forma, o problema de controle desta variável é praticamente um problema SISO, o que é adequado ao controlador PID. Pode-se também observar que as atuações sobre a variável manipulada vazão de vapor são bastante parecidas.

Para o controle da variável nível, entretanto, que é influenciado tanto pela vazão de vapor como pela vazão de retirada de líquido, o problema torna-se MISO, o que dificulta a ação do controlador PID e beneficia o controlador preditivo multivariável. O índice de desempenho teve uma melhora de 721,4%. Pode-se notar, também, a diferença de ação sobre a variável manipulada vazão de retirada de líquido, onde o IHRMPC atuou de forma mais suave.

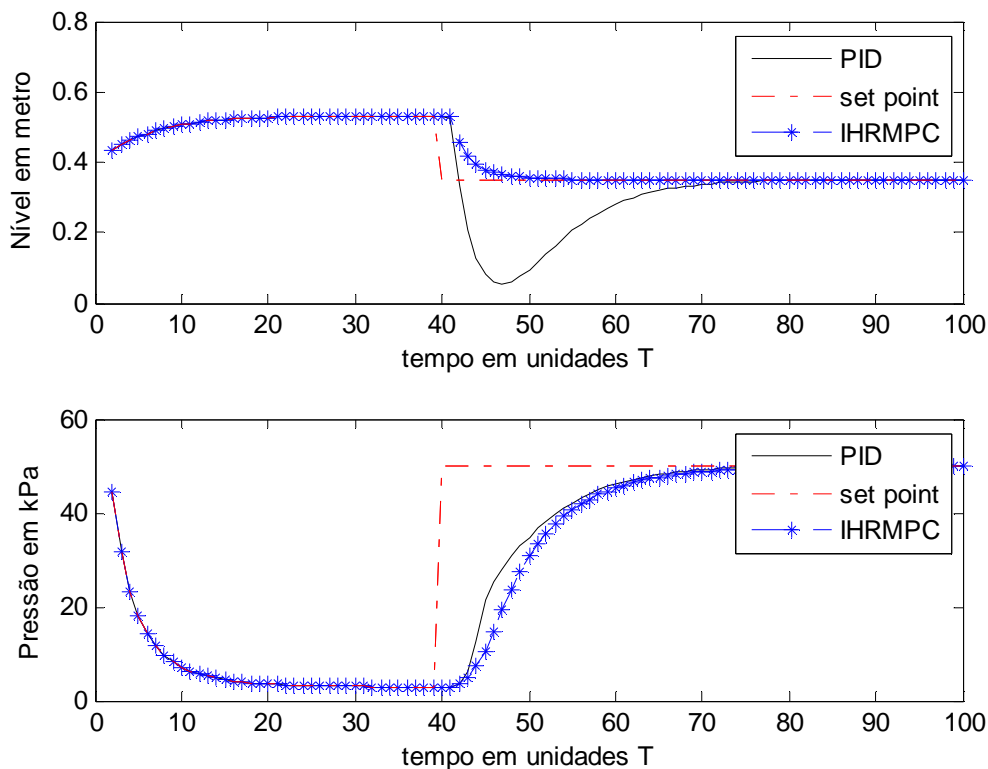
### ***X.5.2. Comparação IHRMPC com PID no problema regulatório***

Estudando as respostas dos controladores envolvidos ao problema regulatório, onde ocorre uma perturbação de 10% na temperatura de entrada da carga no instante 105\*T, pode-se perceber, conforme a Figura X-31 e a Figura X-32, que o IHRMPC apresentou uma melhor performance no controle de nível, onde o problema observado é MISO, enquanto que os controladores PID apresentaram um melhor desempenho no controle da pressão que, conforme já mencionado, é um problema SISO. Isso pode ser melhor registrado acompanhando as variações nos índices de desempenho criados, conforme a equação (X-8). Para o controle de nível, o *ID* do PID ficou em 0,0527 e para o controle de pressão este índice ficou em 0,6014. O desempenho apresentado pelo IHRMPC foi de 0,00042155 para o nível e de 2,0776 para a pressão. Isso representa uma resposta pior do índice *ID* para o controlador proposto neste

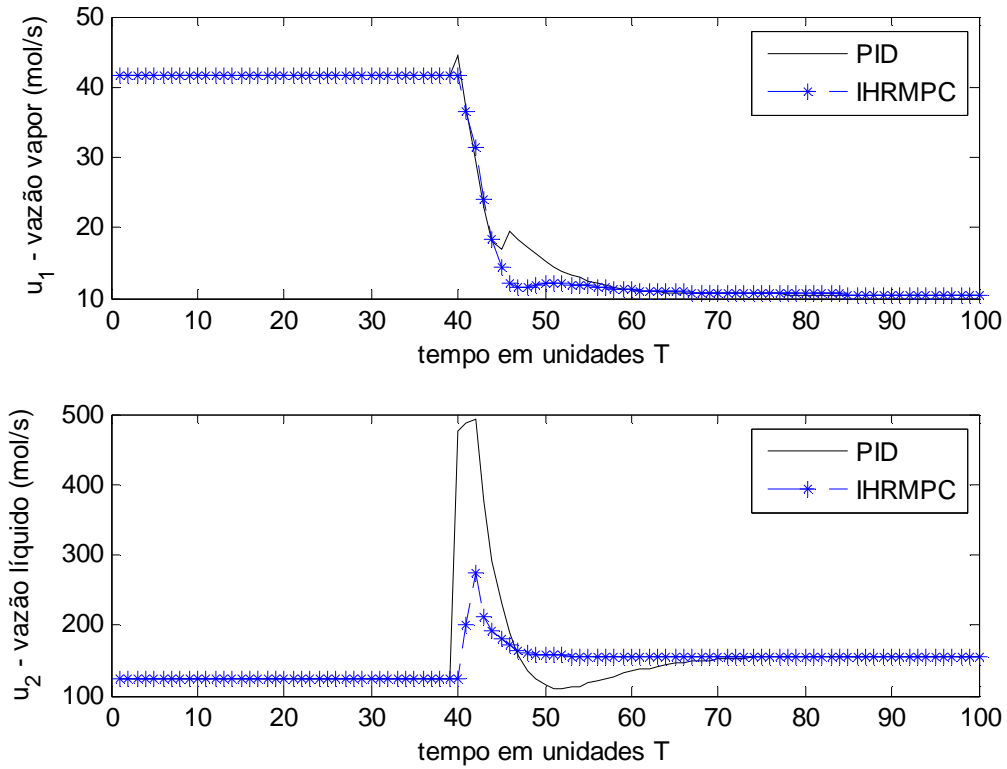
trabalho de 28,95% e uma melhora neste índice para o controle de nível de 12500%.

Pode-se notar, também, que o IHRMPC apresenta uma resposta mais suave para as variáveis manipuladas.

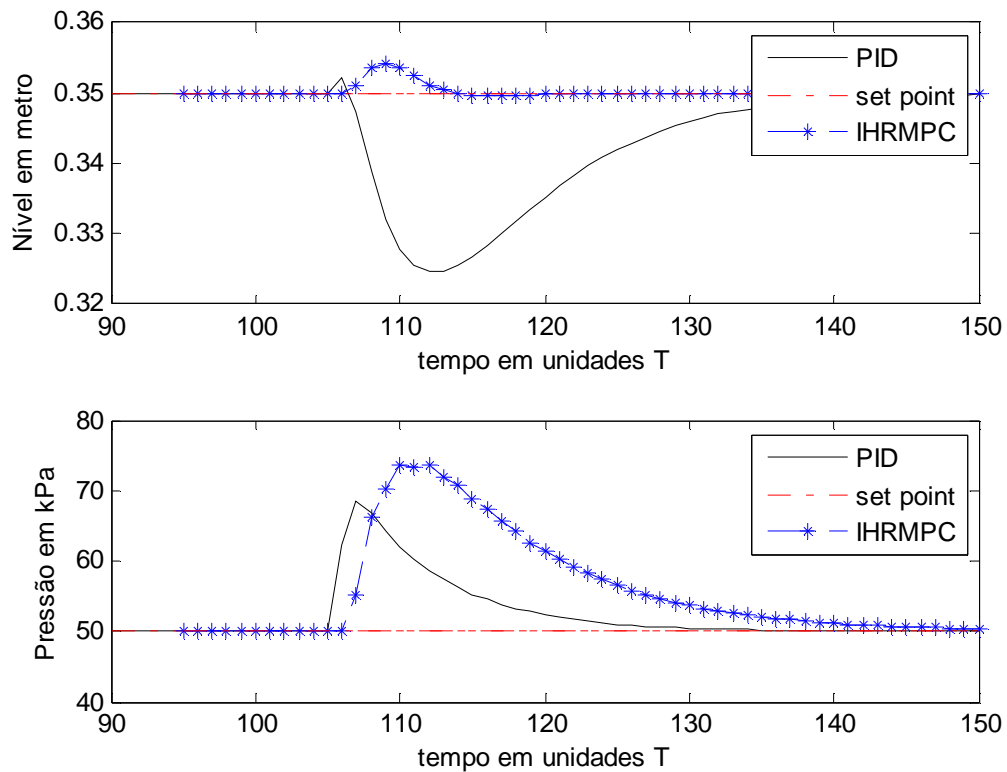
A Figura X-33 e a Figura X-34 mostram os resultados obtidos simulando, simultaneamente, uma perturbação de 20% crescente na vazão de carga e de 10% também crescente na temperatura desta carga para o IHRMPC e para os dois PID's, no instante  $t=105 \cdot T$ . Os índices de desempenho obtidos, que foram definidos conforme a equação (X-8), para o controle de nível teve um  $ID$  de 0,0112 para o IHRMPC enquanto que para o controlador LIC este índice foi de 0,0164. Para o controle de pressão, o IHRMPC apresentou um índice de 0,6942 enquanto que o PIC teve 0,9741. Pode-se observar que o IHRMPC apresentou um desempenho ligeiramente superior aos controladores PID, tanto para o caso da variável nível, como para o caso da variável de controle pressão. No entanto, a melhora do IHRMPC para este caso foi mais modesta no controle de nível, com uma manipulação um pouco mais agressiva nas variáveis de vazão de retirada de líquido e de retirada de vapor.



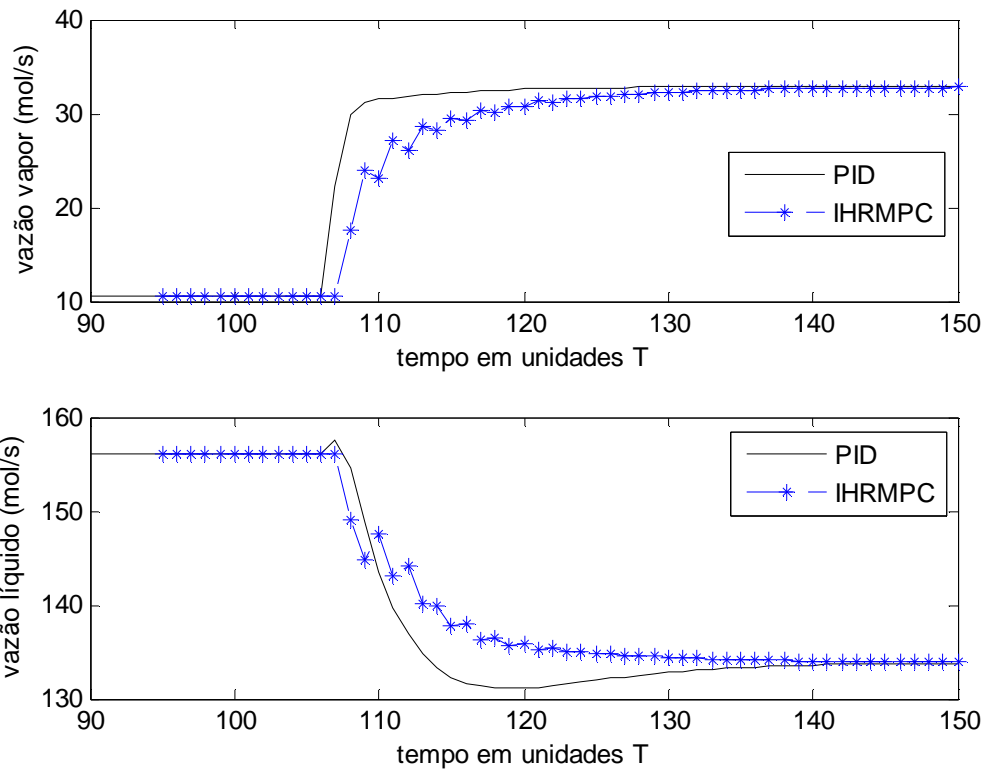
**Figura X-29– Comparação das respostas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão**



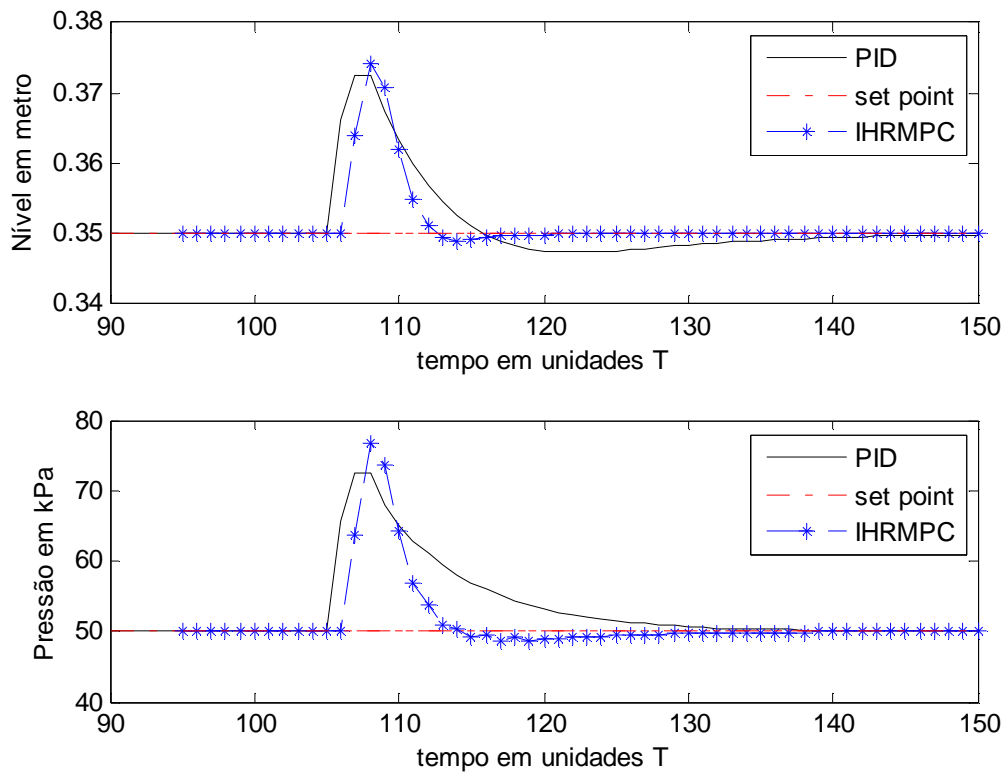
**Figura X-30– Comparação do comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a um degrau no set point de nível e de pressão**



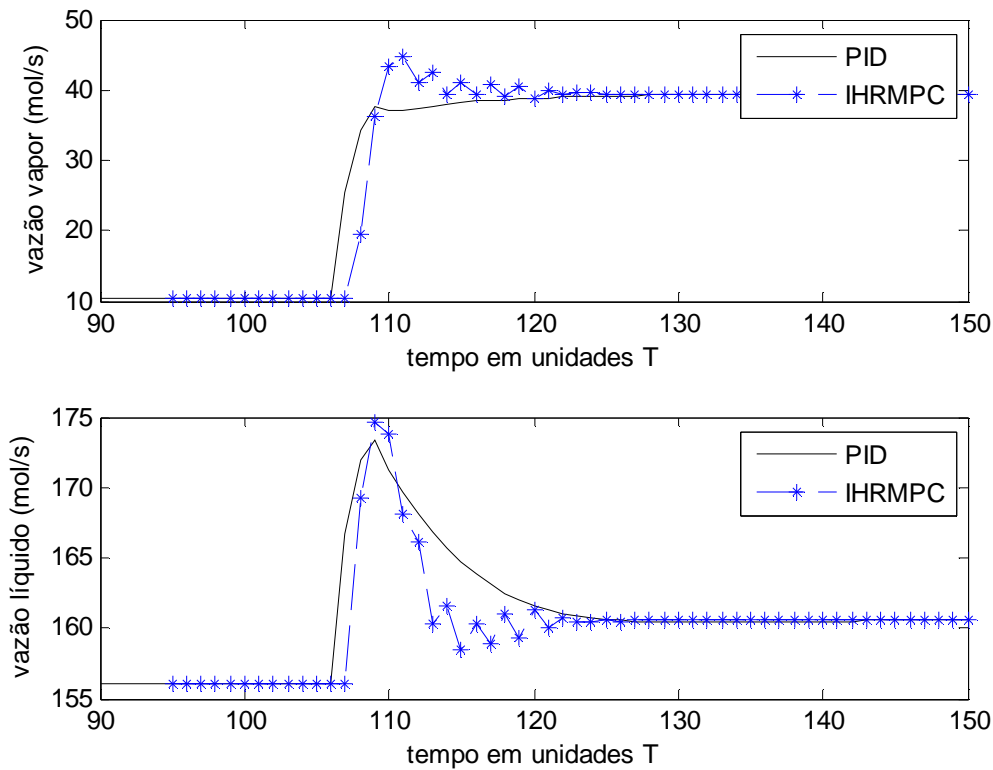
**Figura X-31– Resposta do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10%**



**Figura X-32– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e do IHRMPC frente a uma perturbação na temperatura de carga de 10%**



**Figura X-33– Resposta do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na carga de 20% de vazão e de 10% na temperatura**



**Figura X-34– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC frente a uma perturbação na carga de 20% na vazão e de 10% na temperatura**

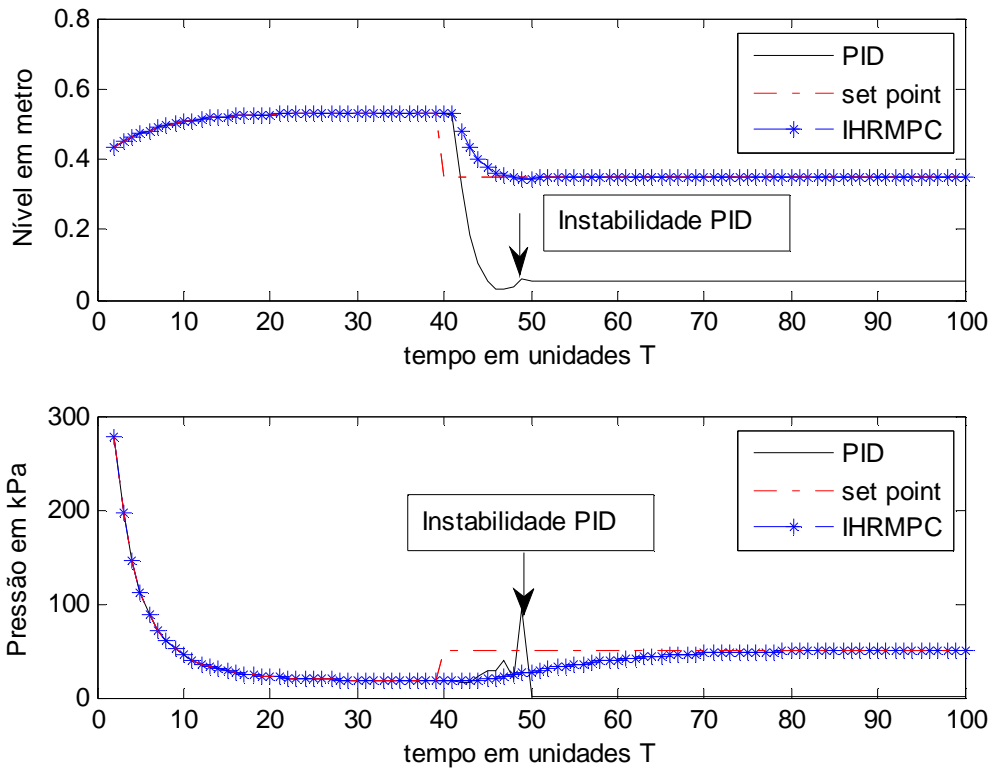
### ***X.5.3. Comparação IHRMPC com PID no problema de incerteza de modelo***

A partir do simulador EMSO foi considerado o tambor de *flash* em que seu ganho estacionário na variável de pressão pudesse ser alterado dentro do Matlab. Essa incerteza no modelo da pressão tornou o ganho estático do processo quatro vezes maior que o do modelo levantado inicialmente para o IHRMPC.

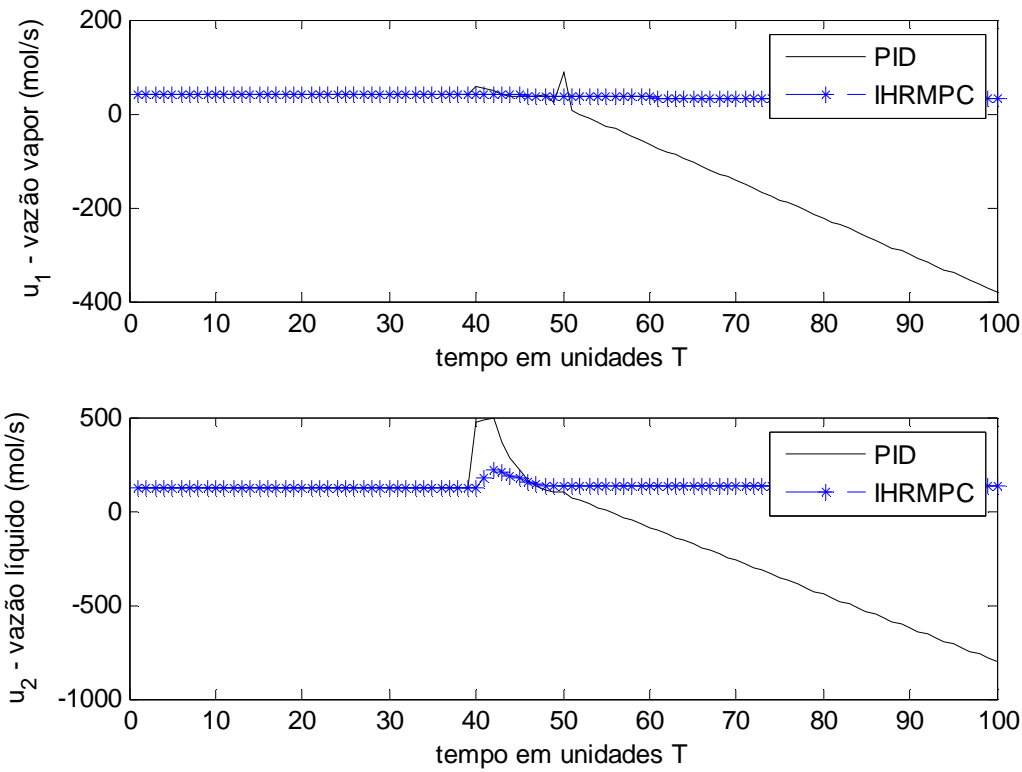
A Figura X-35 e a Figura X-36 mostram o comportamento das variáveis controladas e manipuladas para o caso em que um degrau é aplicado ao set point do nível, também no valor de 0,35 metros, e na pressão, também no valor de 50 kPa. Neste exemplo, o processo não se encontrava em estado estacionário e os controladores foram mantidos em manual, com cada *set point* seguindo sua respectiva variável de processo, até o instante 40, onde o degrau foi aplicado.

Pode-se perceber que o PID acabou instabilizando, enquanto que o IHRMPC se manteve estável, Essa incerteza tinha sido prevista no conjunto de modelos possíveis deste último controlador.

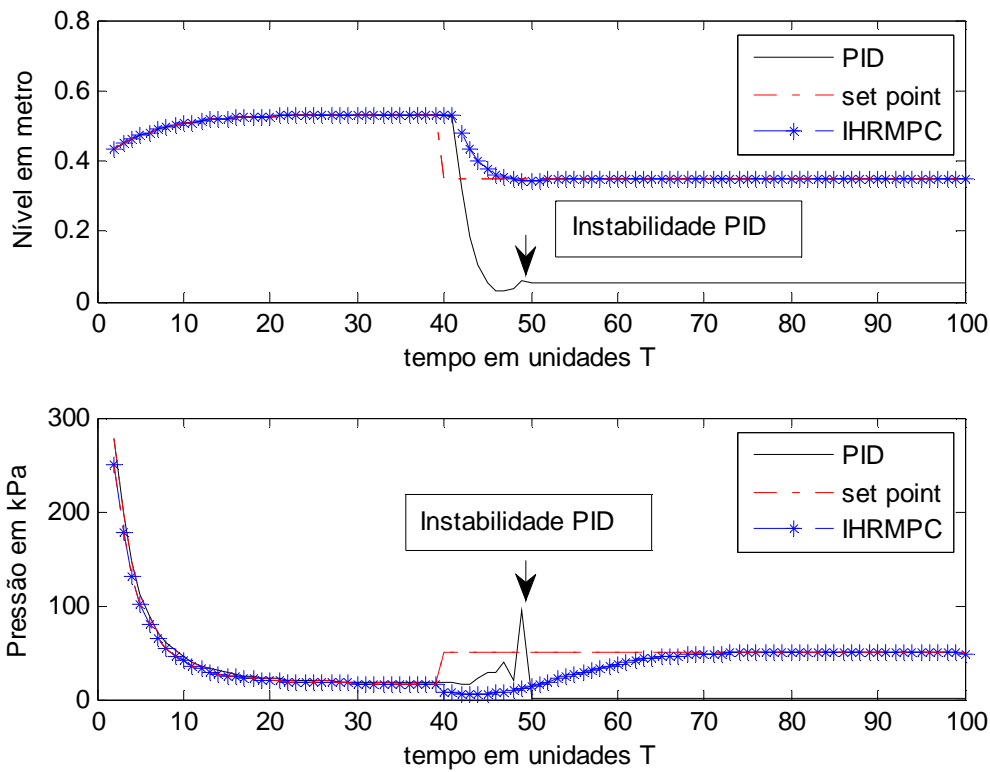
Para o caso de uma incerteza não prevista pelo controlador, o IHRPMC não perde a estabilidade, como pode ser visto na Figura X-37 e na Figura X-38, e também não se percebe uma alteração significativa em seu desempenho.



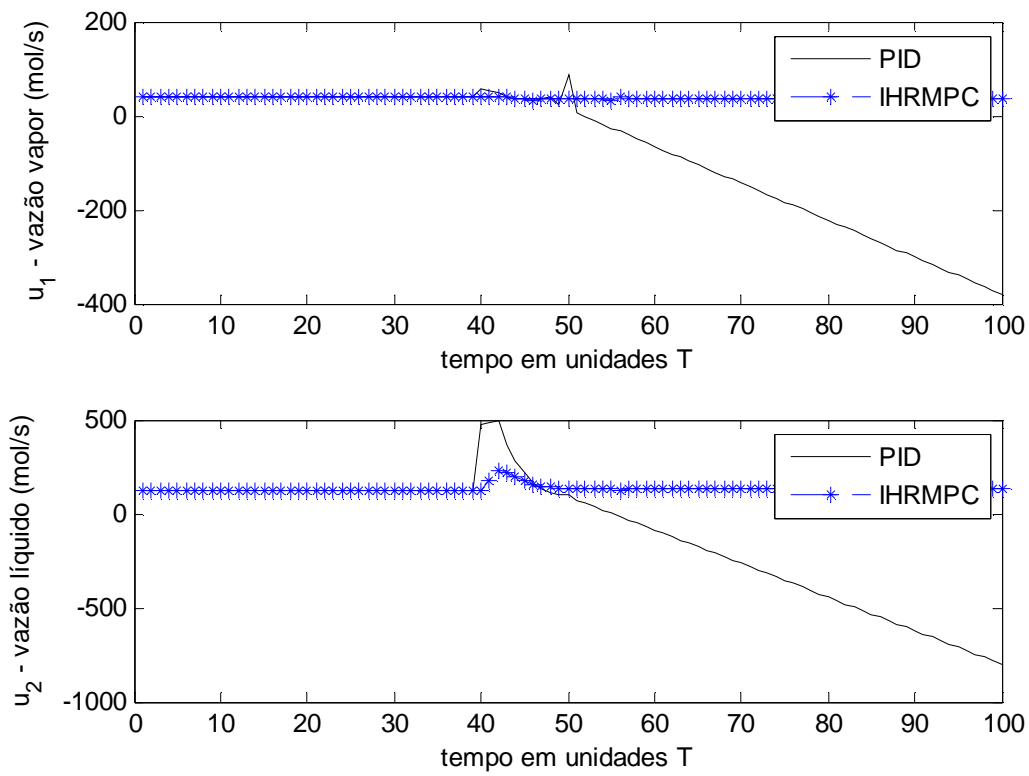
**Figura X-35– Comportamento das variáveis controladas com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo prevista pelo IHRMPC**



**Figura X-36– Resposta das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo prevista pelo IHRMPC**



**Figura X-37– Resposta das variáveis controladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo não prevista pelo IHRMPC**



**Figura X-38– Comportamento das variáveis manipuladas do modelo com controladores PID e IHRMPC para uma incerteza de modelo não prevista pelo IHRMPC**



## XI. CONCLUSÕES

---

### XI.1. CONTROLADOR PREDITIVO MULTIVARIÁVEL ROBUSTO

Neste trabalho foi apresentada uma proposta para implementação de um controlador preditivo robusto baseado em espaço de estado. O estado que foi proposto foi um estado baseado nas últimas leituras da planta e nas últimas ações de controle sobre a mesma. Este estado não mínimo dispensa o uso de um observador de estados, garantindo a estabilidade do processo em malha fechada com o controlador proposto. Outra característica apresentada pelo controlador foi a de possuir um horizonte de predição infinito. O controlador de horizonte infinito garante estabilidade no caso nominal, onde o modelo da planta é igual ao modelo considerado pelo controlador para o processo. O controlador apresentado neste trabalho também considerou a robustez frente à possibilidade de incerteza no modelo da planta, incluindo uma restrição na função objetivo de cada modelo possível para as variáveis estáveis do processo. Finalmente, a possibilidade de existência de polos integradores neste processo também foi considerada.

Os controladores obtidos durante o desenvolvimento dos trabalhos preliminares, visando mostrar a viabilidade da proposta, foram testados com um modelo de uma coluna de separação. Na sequência, o controlador foi testado em um ambiente de simulação rigoroso e comparado com dois controladores PID. Com as sintonias propostas neste trabalho, o controlador IHRMPC apresentou um melhor desempenho para tanto no problema servo como no problema regulatório, através da rejeição de perturbações no sistema. Também se percebeu uma ação mais suave sobre as variáveis manipuladas e menor *overshoot* nas variáveis controladas. Em determinadas circunstâncias, os controladores PID apresentaram instabilidades que o IHRMPC ignorou.

### XI.2. CONTRIBUIÇÕES DESTE TRABALHO

Este trabalho traz como contribuição um controlador preditivo multivariável de horizonte infinito utilizando modelos em espaço de estado não mínimo e mensuráveis a cada instante e que considera, no seu modelo interno, uma incerteza na parte estável, além da existência de polos integradores no processo. Este tratamento com

os polos estáveis e instáveis segregados ao longo do desenvolvimento do controlador com estado não mínimo e variáveis de estado mensuráveis, conforme indicado nos capítulos VIII e IX representa algo inédito na literatura.

### **XI.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Uma extensão deste trabalho seria avaliar a performance do IHRMPC apresentado frente a aplicações de maior complexidade e dimensão.

O algoritmo desenvolvido pode ser melhorado com o controle por faixa para as variáveis controladas, reduzindo assim o número de variáveis controladas que, efetivamente, estão sendo controladas, em um dado instante, e permitindo que as manipuladas fiquem disponíveis apenas para as variáveis controladas que se encontram fora da faixa admissível.

Uma melhoria substancial para o controlador desenvolvido seria a transformação das restrições do IHRMPC que dependem do modelo da planta  $\theta_p$ , que são restrições não lineares, em LMI. Linearizando estas restrições, o controlador passaria a ser robusto considerando uma incerteza politópica em torno dos modelos considerados e não uma incerteza multimodelo.

Outra contribuição que poderia ser acrescentada a este trabalho seria a inclusão de incerteza nos modelos das variáveis integradoras.

## XII. BIBLIOGRAFIA

---

- ASTRÖM, K.J., HÄGGLUND, B., 1995, **PID Controllers: Theory, Design and Tuning** ISA.
- ASTRÖM, K.J., WITTENMARK, B., 1997, **Computer Controlled Systems Theory and Design** 3 ed. New Jersey, Prentice Hall.
- BADGWELL, T.A., 1997, "Robust model predictive control of stable linear systems", **International Journal of Control**, v.68, pp.797-818.
- BALLIN, L.S., 2008, **Implementação Industrial de um Controlador Preditivo Multivariável**, MSc., USP, São Paulo, SP, Brasil.
- BEMPORAD, A., BORELLI, F., MORARI M., 2002, "Model Predictive Control based on linear programming-the explicit solution", **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.47, n.12, pp.1974-1985.
- BITMEAD, R.R., GEAVERS, M. WERTZ, V., 1990, "Adaptive Optimal Control" **Englewood Cliffs, NJ** Prentice Hall.
- CAMACHO, E.F., BORDONS, C., 2004, "Control Predictivo: pasado, presente y futuro", **Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial (RIAI)** v.1 n.3.
- CARRAPIÇO, O.L., 2004, **Controle Preditivo de Horizonte Infinito para processos integradores com tempo morto**, MSc., USP, São Paulo, SP, Brasil.
- CARRAPIÇO, O.L., ODLOAK, D., 2005, "A Stable Model Predictive Control for Integrating Process", **Computers and Chemical Engineering**, v.29 n.5, pp 1089-1099.
- CHEN, H., ALLGÖWER, F. 2009, "A computationally attractive nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability for stable systems" **Journal of Process Control**, v. 8. n. 5-6, pp. 475-485 .
- CUTLER, C.R.; RAMAKER, B.L., 1979, "Dynamic matrix control – a computer control algorithm" **AIChE 86<sup>th</sup> National Meeting**, Houston, TX .
- CUZZOLA, F.A., GEROMEL, J.C., MORARI, M., 1996, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities". **Automatica** v.32, n. 10,

pp.1361-1379.

DOUGHERTY, D., COPPER, D., 2003, "A practical multiple model adaptive strategy for single-loop MPC". **Control Engineering Practice** v.11, pp.141-159.

FAMULARO, D., FRANZÉ, G., 2011, "Output feedback model predictive control of uncertain norm-bounded linear systems" **International Journal of Robust and Nonlinear Control** v.21, pp.838-863.

FRIEDLAND, B., 1986, **Control System Design: An introduction to state-space methods** 3 ed. New York, McGraw-Hill .

FRIEDMAN, Y.Z., 1994, "Tuning of averaging level controllers". **Hydrocarbon Processing Journal** v.16, n. 5, pp.123-134.

GARCIA, C.E., PRETT, D.M., MORARI, M. 1989, "Model Predictive Control: Theory and practice – a survey". **Automatica** v.25, n. 3, pp.335-348.

GONZÁLEZ, A.H., ODLOAK, D., MARCHETTI, J., L., 2007, "Extended Robust Predictive Control of Integrating Systems". **AIChE Journal**, v.53, pp.1758-1769.

GONZÁLEZ, A.H., PEREZ, J.M., ODLOAK, D., 2007, "Infinite Horizon MPC with Non-Minimal State Space Feedback". **Journal of Process Control**, v.19, pp.473-481.

GONZÁLEZ, A.H., ODLOAK, D., 2009, "A Stable MPC with Zone Control". **Journal of Process Control**, v.19, pp.110-122.

GONZÁLEZ, A.H., ODLOAK, D., 2011, "Robust model predictive controller with output feedback and target tracking". **IET Control Theory and Applications**, v.4(8), pp.1377-1390.

KOTHARE, M.V., BALAKRISHNAN, V., MORARI, M., 1996, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities". **Automatica** v.32, pp.1361-1379.

KOTHARE, M.V., BALAKRISHNAN, V., MORARI, M., 2002, "An improved approach for constrained robust model predictive control". **Automatica** v.38, n. 7, pp.1183-1189.

LEE, J.H., YU, Z., 1997, "Worst case formulation of model predictive control for system with bounded parameters". **Automatica** v.33, pp.763-781.

LØVAAS, C., SERON, M. M., GOODWIN, G. C., 2010 "Robust Output-Feedback

- MPC with Integral Action". **IEEE Transaction on Automatic Control** v.55(7), pp.1531-1543.
- LU, Y., ARKUN, Y., 2000, "Quasi min-max MPC algorithms for LPV systems". **Automatica** v.36, pp.527-540.
- MACIEJOWSKI, J.M., 2002, **Predictive Control with Constraints** 2 ed. New York, Prentice Hall.
- MHASKAR, P., 2006, "Robust model predictive control design for fault tolerant control of process systems". **Ind. Eng. Chem. Res**, v.45, pp.8565-8574.
- MICHALSKA, H., MAYNE, D.Q., 1993, "Robust receding horizon of constrained non linear systems". **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, n. 11, pp.1623-1633.
- MORO, L.F.L., 1992, **Desenvolvimento de um Controlador Preditivo Multivariável para um Conversor Industrial de Craqueamento Catalítico**, MSc., USP, São Paulo, SP, Brasil.
- MORO, L.F.L., ODLOAK D., 1995, "Constrained Multivariable Control of Fluid Catalytic Cracking Converters", **Journal of Process Control**, v.5,n.1, pp. 29-39.
- MORSHEDI, A.M., CUTLER, C.R., SKROVANEK, T.A., 1985, "Optimal Solution of Dynamic Matrix Control with Linear Programming Techniques". **Proc. Am. Control Conf.** Boston MA, pp.199-208.
- MUSKE, K. R., RAWLINGS, J.B., 1993, "Model predictive control with linear models". **AIChE Journal**, v.39, pp.262-287.
- ODLOAK, D., 2004, "Extended Robust Model Predictive Control". **AIChE Journal**, v 50, n. 8, pp.1824-1836.
- OGATA, K., 1997, **Model Control Engineering** 3 ed. University of Minnesota, Prentice Hall.
- PANNOCCHIA, G., 2003, "Robust disturbance modeling for model predictive control with application to multivariable ill-conditioned processes", **Journal of process control**, v.13, n. 8, pp. 693-701.
- PEREZ, J.M., 2006, **Controle Preditivo Robusto com Realimentação de Saída**, MSc., USP, São Paulo, SP, Brasil.
- QIN, S.J., BADGWELL, T.A, 2000, "An overview of nonlinear model predictive control

- applications". **Birkhauser**.
- QIN, S.J., BADGWELL, T.A., 2003, "A survey of industrial model predictive control technology". **Control Engineering Practice** v.11, pp.733-764.
- RALHAN, S., BADGWELL, T.A., 2000, "Robust control of stable linear systems with continuous uncertainty", **Computer and chemical engineering**, v.24, pp. 2533-2544.
- RAWLINGS, J.B., MUSKE, K.R., 1993, "The stability of constrained multivariable receding horizon control", **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, pp. 1512-1516.
- RICHALET, J., 1993, "Industrial Applications of model based predictive control", **Automatica**, v.29, n.5, pp. 1251-1274.
- RIVERA, D.E., MORARI, M., SKOGESTAD, S., 1986, "Internal Model Control, 4.PID Controller Design", **Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development**, v.25, n.1, pp. 252-265.
- RODRIGUES, M.A., 2001, **Controle Preditivo Robusto com Horizonte de Prediçao Infinito**, DSc., USP, São Paulo, SP, Brasil.
- RODRIGUES, M.A., ODLOAK D., 2000, "Output feedback MPC with guaranteed robust stability", **Journal of Process Control**, v.10, n.6, pp. 557-572.
- RODRIGUES, M.A., ODLOAK D., 2003a, "An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes", **Computers Chem. Eng**, v.27, pp. 1113-1128.
- RODRIGUES, M.A., ODLOAK D., 2003b, "MPC for stable linear systems with model uncertainty", **Automatica**, v.39, pp. 569-583.
- RODRIGUES, M.A., ODLOAK D., 2005, "Robust MPC for Systems with Output Feedback and Input Saturation", **Journal of Process Control**, v.15, pp. 837-846.
- SCOKAERT, P.O.M., MAYNE, D.Q., 1998, "Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems", **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.43, n.8, pp. 1136-1142.
- SOARES, R.P., 2003, **Desenvolvimento de um Simulador Genérico de Processos Dinâmicos**, MSc., UFRGS, Porto Alegre, RGS, Brasil
- WAN, Z.Y., KHOTARE M.V., 2002, "Robust output feedback model predictive control

- using off-line linear matrix inequalities”, **Journal of Process Control**, v.12, n. 7, pp. 763-774.
- WAN, Z.Y., KHOTARE M.V., 2003, “Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set”, **Systems & Control Letters**, v.48, n. 5, pp. 375-383.
- WANG, Y.J., RAWLINGS J.B., 2004, “A new robust model predictive control method I: theory and computation”, **Journal of process control**, v.14, pp. 231-247.
- XIA, Y., LIU G.P., SHI, P., CHEN J, REES D., 2008, “Robust constrained model predictive control based on parameter-depedent Lyapunov function”, **Circuits systems and signal processing**, v.27, pp. 429-446.
- ZIEGLER, J.B., NICHOLS N.B., 1942, “Optimum settings for automatic controllers”, **ASME Transactions**, v.64, pp. 759-768.

### XIII. ANEXO I – PROPRIEDADES DA MATRIZ DE ESTADO DO MODELO INCREMENTAL

---

#### A-I.1. INTRODUÇÃO

A matriz de estados obtida a partir do modelo de estados de MACIEJOWSKI (2002) escrito na forma incremental é uma matriz singular e de posto deficiente. No entanto, conforme demonstrado a seguir, este comportamento não se mantém ao longo do horizonte de predição do controlador.

#### A-I.2. PROPRIEDADE 1 – COMPORTAMENTO DA MATRIZ DE ESTADO DO MODELO DE REALINHAMENTO AO LONGO DO HORIZONTE DE PREDIÇÃO

A predição feita no instante  $k$  ao longo do horizonte de predição de um controlador de horizonte infinito, por exemplo, será definida pela equação (IV-21). Após o horizonte de controle  $m-1$ , a equação indicada em (IV-21) pode ser aproximada para a equação (XIII-1).

$$\begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m|k} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m-1|k} \quad \text{(XIII-1)}$$

A equação (XIII-1) apresenta  $nu$  linhas de zero, o que reduz o posto desta matriz  $A$  para  $nx-nu$ , onde  $nx$  corresponde à dimensão do estado.

A predição para o estado no instante imediatamente superior,  $k+m+1$ , será obtida a partir da equação (XIII-2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m+1|k} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m|k} \\ \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m|k} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m-1|k} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m+1|k} = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k+m-1|k} \quad \text{(XIII-2)}$$

Desenvolvendo a expressão quadrática, obtém-se:



$$\begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y^2 & A_y A_{\Delta u} + A_{\Delta u} \underline{I} \\ 0 & \underline{I}^2 \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-3)}$$

Avaliando o termo indicado por  $\underline{I}^2$ :

$$\underline{I}^2 = \begin{bmatrix} 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & I_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & I_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \\ 0_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} & \dots & I_{nu} & 0_{nu} & 0_{nu} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-4)}$$

A equação indicada em (XIII-4) mostra que o número de linhas nulas aumentou em  $2*nu$  e, portanto, o posto deficiente desta matriz de estados neste instante será diminuído de  $2*nu$ .

Por analogia:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_y & A_{\Delta u} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}^3 = nx - 3*nu \quad \text{(XIII-5)}$$

Generalizando:

$$\text{rank}(A^n) = nx - n.nu, \quad 1 \leq n \leq nb-1 \quad \text{(XIII-6)}$$

A relação indicada em (XIII-6) considera como instante inicial,  $n=1$ , o intervalo equivalente ao horizonte de controle,  $m$ , instante a partir do qual as entradas aplicadas ao processo serão nulas.

Após o intervalo de instante  $m+nb-1$ , o número de linhas nulas inseridas por  $\underline{I}$  não é mais aumentado. A matriz  $\underline{I}$  se torna uma matriz de zeros e o rank da matriz  $A$  não é mais reduzido.

$$\begin{aligned} \text{rank}(A^n) &= nx - (nb-1).nu = (na-1).ny, \quad n \geq nb-1 \\ nx &= (na+1).ny + (nb-1).nu \end{aligned} \quad \text{(XIII-7)}$$

$$nx \quad - \quad \text{Dimensão do estado, } nx = (na+1).ny + (nb-1).nu$$

Por outro lado, após o horizonte de controle  $m$ , a predição do vetor  $x$  para o instante imediatamente superior a este horizonte, instante  $k+m$ , será dada pela equação

**(XIII-8).**

$$x(k+m|k) = \begin{bmatrix} x_y(k+m+1) \\ \Delta u(k+m) = 0 \\ \Delta u(k+m-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-(nb-2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_y(k+m+1) \\ 0 \\ \Delta u(k+m-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-(nb-2)) \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-8)}$$

A predição do vetor de estados para o instante seguinte, instante  $k+m+1$ , em relação à este instante  $k+m$ , será:

$$x(k+m+1|k) = Ax(k+m|k) \quad \text{(XIII-9)}$$

Para o instante igual ou superior a  $m+nb-1$ , o vetor  $x$  de estados será um vetor conforme indicado na equação **(XIII-10)**.

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_y \\ x_{\Delta u} \end{bmatrix}_{k|k+m+nb-1} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-na) \\ 0_{m \times 1} \\ \vdots \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_y(k)_{(na+1),ny \times 1} \\ 0_{(nb-1),nu \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-10)}$$

A predição de estados, para o intervalo  $k+m+nb-1$ , em relação ao instante  $k+m$ , será:

$$x(k+m+nb-1|k) = A^{nb-1}x(k+m|k) \quad \text{(XIII-11)}$$

Para um instante genérico  $n$  superior ao horizonte de controle  $m$ , a equação para a predição de estados considera apenas a parcela da equação em espaço de estados referente à matriz  $A$  de estados, conforme indicado pela equação **(XIII-12)**.

$$x(k+m+n|k) = A^n x(k+m|k), \quad n \geq 1 \quad \text{(XIII-12)}$$

A equação **(XIII-10)** mostra que o vetor  $x_{\Delta u}$  será totalmente nulo e, portanto, na equação **(XIII-12)**, é correto afirmar que:

$$A^n = A^{n-(m+nb-1)} A^{m+nb-1} = \underline{A}^{n-(m+nb-1)} A^{m+nb-1}$$

onde

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-13)}$$

A equação (XIII-13) considera que a componente  $A_{\Delta u}$  seja nula tendo em vista que, após  $m+nb-1$ , todo o vetor  $x_{\Delta u}$  será nulo.

Se for considerado  $n$  como o instante a partir de  $m$ , horizonte de controle, pode-se simplificar a equação (XIII-13) como:

$$A^n = \underline{A}^{n-(nb-1)} A^{nb-1} \quad n \geq nb-1 \quad (\text{XIII-14})$$

A equação em (XIII-14) será tratada neste trabalho como *Propriedade 1* da matriz de estados.

### A-I.3. PROPRIEDADE 2 – TRANSFORMAÇÃO DE ESTADOS

O modelo considerado neste trabalho apresenta  $ny$  polos integradores devido à transformação do modelo do processo da forma posicional para uma forma incremental. Além destes polos, poderão existir os polos instáveis do processo. Em uma planta industrial petroquímica, os polos instáveis mais comuns são os polos integradores. Portanto, por simplificação, considera-se que existam apenas polos integradores no processo.

De modo a evitar que a função objetivo de um controlador de horizonte infinito assuma um valor infinito devido à existência dos polos integradores, separa-se os polos integradores dos polos estáveis através de uma transformação na matriz de estados.

Uma forma de obter esta transformação é através da decomposição de Jordan por autovalores da matriz em referência, conforme indicado na equação (XIII-15).

$$AV_{com} = V_{com}A_D \quad (\text{XIII-15})$$

$A$	-	Matriz de estados, $A \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$
$A_D$	-	Matriz de autovalores da matriz $A$ na diagonal principal, $A_D \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$
$V_{com}$	-	Matriz formada pelos autovetores da matriz $A$ de estados, $V_{com} \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$

No entanto, após a transformação de estados, deseja-se retornar ao estado original. Como as matrizes  $A$  e, conseqüentemente,  $V_{com}$  são linearmente dependentes, estas matrizes não são inversíveis, o que torna impossível a recuperação do estado após a

transformação. Desta forma, esta transformação para a separação de polos estáveis dos polos instáveis torna-se inviável neste modelo.

No entanto, se for considerado apenas os estados a partir do instante  $m+nb-1$ , a matriz  $A$  transforma-se na matriz  $A_y$ , que é linearmente dependente e, portanto inversível. Logo é possível aplicar esta transformação para os estados definidos a partir deste instante  $m+nb-1$ , separando os polos integradores dos polos estáveis e recuperando o estado original a partir da inversão de  $V_{COM}$ .

$$A_y \underline{V} = \underline{V} A_d \quad \text{(XIII-16)}$$

- $A_y$  - Matriz de estados associada às saídas do processo  
 $A_y \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]}$
- $\underline{V}$  - Matriz de autovetores da matriz  $A_y$   
 $\underline{V} \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]}$
- $A_d$  - Matriz de autovalores da matriz  $A_y$  na diagonal principal,  
 $A_d \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny] \times [(na+1).ny]}$

De forma a manter as matrizes com a dimensão do estado original,  $x \in \mathbb{R}^{[(na+1).ny+(nb-1).nu] \times [(na+1).ny+(nb-1).nu]}$ , pode-se definir o conceito de matriz expandida, conforme indicado na equação (XIII-17).

$$V = \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-17)}$$

$$V_{in} = \begin{bmatrix} \underline{V}^{-1} & \underline{0}^T \end{bmatrix}$$

- $V$  - Matriz estendida de autovetores da matriz  $A_y$ ,  $V \in \mathfrak{R}^{nx \times (na+1).ny}$
- $\underline{0}$  - Matriz de zeros para acerto de dimensão  
 $\underline{0} \in \mathbb{R}^{[(nb-1).nu] \times [(na+1).ny]}$
- $V_{in}$  - Matriz estendida da inversa de  $V$ ,  $V_{in} \in \mathfrak{R}^{(na+1).ny \times nx}$
- ..

Aplicando a definição de (XIII-17) em (XIII-16), vem:

$$\underline{A} V = V A_d \quad \text{(XIII-18)}$$

Multiplicando (XIII-18) por  $V_{in}$  no lado direito desta equação, vem:

$$\underline{A}V_{in} = VA_dV_{in} \rightarrow \underline{A} = VA_dV_{in} \quad (\text{XIII-19})$$

O vetor  $V$  na equação (XIII-19) é composto de autovetores integradores e autovetores estáveis da matriz de estados original do sistema, enquanto que a matriz  $A_d$  é composta pelos autovalores integradores e estáveis desta matriz de estados. A equação (XIII-20) mostra estes vetores separados na parte estável e na parte não estável.

$$\begin{aligned} V &= [V_{nst} \quad V_{st}] \\ V_{in} &= \begin{bmatrix} \tilde{V}_{nst} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} \\ A_d &= \begin{bmatrix} F_{nst} & 0 \\ 0 & F_{st} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{XIII-20})$$

- $V_{nst}$  - Autovetores não estáveis  $V_{nst} \in \mathfrak{R}^{nns \times nns}$
- $V_{st}$  - Autovetores estáveis  $V_{st} \in \mathfrak{R}^{ns \times ns}$
- $F_{nst}$  - Autovalores não estáveis  $F_{nst} \in \mathfrak{R}^{nns}$
- $F_{st}$  - Autovalores estáveis  $F_{st} \in \mathfrak{R}^{ns}$

Desta forma, a equação (XIII-19) pode ser escrita de acordo com o indicado na equação (XIII-21).

$$\underline{A} = [V_{nst} \quad V_{st}] \begin{bmatrix} F_{nst} & 0 \\ 0 & F_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{nst} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} \quad (\text{XIII-21})$$

Multiplicando ambos os termos da equação (XIII-19) por  $V_{in}$ , agora pelo lado esquerdo, vem:

$$V_{in}\underline{A} = V_{in}VA_dV_{in} \rightarrow V_{in}\underline{A} = A_dV_{in} \quad (\text{XIII-22})$$

Tornando a multiplicar a equação (XIII-22) por  $A^{nb-1}$  pelo lado esquerdo, vem:

$$V_{in}\underline{A}A^{nb-1} = A_dV_{in}A^{nb-1} \quad (\text{XIII-23})$$

Da propriedade 1, equação (XIII-14) e, fazendo o instante  $n$  igual à  $nb$ :

$$A^n = \underline{A}^{n-(nb-1)}A^{nb-1} \quad n = nb \rightarrow A^{nb} = \underline{A}^{nb-(nb-1)}A^{nb-1} = \underline{A}A^{nb-1} \quad (\text{XIII-24})$$

Substituindo (XIII-24) em (XIII-23):

$$V_{in}A^{nb} = A_d V_{in}A^{nb-1} \quad (\text{XIII-25})$$

A equação (XIII-25) pode ser multiplicada a direita pela matriz de estados  $A$ . Desta forma:

$$V_{in}A^{nb+1} = A_d V_{in}A^{nb} \quad (\text{XIII-26})$$

$$V_{in}A^{nb+1} = A_d V_{in}AA^{nb-1} \quad (\text{XIII-27})$$

Lembrando que na equação (XIII-27), o instante considerado é maior que  $m+nb-1$ , a matriz de estados  $A$  é equivalente a matriz de estados  $\underline{A}$ .

$$V_{in}A^{nb+1} = A_d V_{in}\underline{A}A^{nb-1} \quad (\text{XIII-28})$$

A equação (XIII-19) permite escrever que  $V_{in}\underline{A}$  é equivalente a:

$$V_{in}\underline{A} = V_{in}VA_dV_{in} \rightarrow V_{in}\underline{A} = A_dV_{in} \quad (\text{XIII-29})$$

Substituindo (XIII-29) em (XIII-28):

$$V_{in}A^{nb+1} = A_d A_d V_{in}A^{nb-1} = A_d^2 V_{in}A^{nb-1} \quad (\text{XIII-30})$$

Generalizando a equação (XIII-30) para um instante  $n$  maior ou igual a  $nb-1$ , vem:

$$V_{in}A^n = A_d^{n-(nb-1)} V_{in}A^{nb-1}, \quad n \geq nb-1 \quad (\text{XIII-31})$$

Pode-se observar que a equação (XIII-30) é um caso particular da equação (XIII-31) para  $n$  igual a  $nb-1$ .

A equação (XIII-31) será tratada neste trabalho como a propriedade 2.

#### A-I.4. DEFINIÇÃO DE UM NOVO ESTADO

A partir da transformação descrita, pode-se definir um novo estado transformado  $z$ . Este novo estado terá como predição para um instante imediatamente superior a equação (XIII-32).

$$z(k+1) = A_d z(k) \quad (\text{XIII-32})$$

- $z(k)$  - Novo estado definido  $z \in \mathfrak{R}^{(na+1).ny}$
- $V_{st}$  - Autovetores estáveis  $V_{st} \in \mathfrak{R}^{ns \times ns}$

Este novo estado somente é válido para instantes futuros além do instante  $m+nb-1$ .

O estado original, após o horizonte  $m+nb-1$ , é dado por:

$$x(k+1) = \underline{A}x(k) \quad (\text{XIII-33})$$

Pela equação (XIII-19), abaixo repetida para facilidade do leitor, e substituindo (XIII-19) em (XIII-33), obtém-se (XIII-34).

$$\underline{A} = VA_dV_{in} \quad (\text{XIII-19})$$

$$x(k+1) = VA_dV_{in}x(k) \quad (\text{XIII-34})$$

Multiplicando (XIII-34) por  $V_{in}$  à esquerda:

$$V_{in}x(k+1) = V_{in}VA_dV_{in}x(k) \rightarrow V_{in}x(k+1) = A_dV_{in}x(k) \quad (\text{XIII-35})$$

Comparando (XIII-35) com (XIII-32), é obtida a relação entre o estado original do processo e o estado transformado, conforme a relação (XIII-36).

$$\begin{aligned} z(k) &= V_{in}x(k) \\ x(k) &= Vz(k) \end{aligned} \quad (\text{XIII-36})$$

### A-I.5. PREDIÇÃO DO ESTADO TRANSFORMADO Z

Seja um contador de instante  $j$ . A predição no estado original é indicada na equação (XIII-37).

$$x(k+m+nb-1+j) = \underline{A}^j x(k+m+nb-1) \quad (\text{XIII-37})$$

Substituindo a equação (XIII-19) na equação (XIII-37), vem:

$$x(k+m+nb-1+j) = [VA_dV_{in}]^j x(k+m+nb-1) \quad (\text{XIII-38})$$

Como  $[VA_dV_{in}]^2 = [VA_dV_{in}][VA_dV_{in}] = VA_d^2V_{in}$ , então:

$$x(k+m+nb-1+j) = V[A_d]^j V_{in}x(k+m+nb-1) \quad (\text{XIII-39})$$

Para se transformar a predição para o estado  $z$ , basta multiplicar pela direita a

equação (XIII-39) por  $V_{in}$  :

$$V_{in}x(k+m+nb-1+j) = V_{in}VA_d^jV_{in}x(k+m+nb-1) \quad (\text{XIII-40})$$

$$z(k+m+nb-1+j) = A_d^j z(k+m+nb-1) \quad (\text{XIII-41})$$

### A-I.6. PROPRIEDADE 3 – PREDIÇÃO APÓS O HORIZONTE DE CONTROLE ESTENDIDO

O novo estado descrito em (XIII-41) é formado por modos instáveis e por modos estáveis, separados devido à transformação. Portanto, o estado  $z$  pode ser escrito como:

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_{nst}(k) \\ z_{st}(k) \end{bmatrix} = V_{in}x(k) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{nst} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} x(k) \quad (\text{XIII-42})$$

- $z_{nst}$  - Estado transformado contendo apenas os polos não estáveis do processo e do modelo incremental,  $z_{nst} \in \mathbb{R}^{num+ny}$
- $z_{st}$  - Estado transformado contendo apenas os polos estáveis do processo,  $z_{st} \in \mathbb{R}^{ns}$
- $V_{in}$  - Matriz inversa da matriz estendida  $V$  do estado original,  $V_{in} \in \mathbb{R}^{((na+1).ny+(nb-1).nu) \times ((na+1).ny+(nb-1).nu)}$
- $\tilde{V}_{nst}$  - Matriz inversa dos autovetores não estáveis do processo e do modelo no estado original,  $\tilde{V}_{nst} \in \mathbb{R}^{num+ny}$
- $\tilde{V}_{st}$  - Matriz inversa dos autovetores estáveis do processo no estado original,  $\tilde{V}_{st} \in \mathbb{R}^{ns}$

Os polos instáveis são os polos integradores devido ao modelo incremental e os polos não estáveis do processo. Embora, como já mencionado, este trabalho considera que os polos instáveis são polos integradores, na notação do texto será mantido o índice *un* de “*unstable*” para estes polos integradores da planta. A equação (XIII-43) separa estes polos em integradores e não estáveis.

$$z_{nst}(k) = \begin{bmatrix} z_i(k) \\ z_{un}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i(k) \\ \tilde{V}_{un}(k) \end{bmatrix} x(k) \quad (\text{XIII-43})$$

- $z_{un}$  - Estado transformado contendo apenas os polos integradores do processo,  $z_{un} \in \mathbb{R}^{num}$



- $z_i$  - Estado transformado contendo apenas os polos integradores do modelo,  $z_i \in \mathbb{R}^{ny}$
- $\tilde{V}_{un}$  - Matriz inversa dos autovetores não estáveis do processo no estado original,  $\tilde{V}_{un} \in \mathbb{R}^{num}$
- $\tilde{V}_i$  - Matriz inversa dos autovetores integradores do modelo incremental no estado original,  $\tilde{V}_i \in \mathbb{R}^{ny}$

Para estimar as saídas a partir do estado transformado  $z$ , pode-se aplicar a equação **(XIII-44)**.

$$y(k) = Cx(k) = CVz(k) = C_d \begin{bmatrix} z_{nst}(k) \\ z_{st}(k) \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-44)}$$

- $C_d$  - Matriz de saída para o estado transformado,  $C_d \in \mathbb{R}^{(na+1).ny \times (na+1).ny}$

A matriz de saída  $C_d$  pode ser expressa como indicado na equação **(XIII-45)**.

$$C_d = \begin{bmatrix} C_d^i & C_d^{un} & C_d^{st} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-45)}$$

- $C_d^i$  - Componente de saída relacionada com os estados integradores do modelo,  $C_d^i \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$
- $C_d^{un}$  - Componente de saída relacionada com os estados não estáveis do processo,  $C_d^{un} \in \mathbb{R}^{num \times num}$
- $C_d^{st}$  - Componente de saída relacionada com os estados estáveis do processo,  $C_d^{st} \in \mathbb{R}^{ns \times ns}$

A equação **(XIII-41)** mostra que os estados transformados podem ser estimados a partir do conhecimento da matriz  $A_d$ . Conforme a equação **(XIII-20)**, esta matriz é uma matriz diagonal de autovalores estáveis e não estáveis separados, conforme indicado na equação **(XIII-46)**.

$$A_d = \begin{bmatrix} F_{nst} & 0 \\ 0 & F_{st} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-46)}$$

RODRIGUES e ODLOAK (2003) mostram que a matriz dos autovalores não estáveis pode ser escrita conforme a equação **(XIII-47)**.

$$F^{nst} = \begin{bmatrix} I_{ny} & D \\ 0 & I_{num} \end{bmatrix} \quad \text{(XIII-47)}$$

- $D$  - Matriz auxiliar,  $d_{i,j} = 0 \quad i \neq j; \quad d_{i,j} = 1 \quad i = j; \quad D \in \mathfrak{R}^{ny \times num}$

Reescrevendo a propriedade 2, equação **(XIII-31)**, com os polos separados conforme a equação **(XIII-46)**, e lembrando a equação **(XIII-42)**, onde a matriz inversa de  $V$  é escrita com separação dos polos estáveis e instáveis, vem:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_{nst} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} A^n = \begin{bmatrix} F_{nst} & 0 \\ 0 & F_{st} \end{bmatrix}^{n-(nb-1)} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{nst} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} A^{nb-1} \quad \text{(XIII-48)}$$

A equação **(XIII-48)** representa duas equações, conforme **(XIII-49)** e **(XIII-50)**.

$$\tilde{V}_{nst} A^n = F_{nst}^{n-(nb-1)} \tilde{V}_{nst} A^{nb-1}, \quad n \geq m + nb - 1 \quad \text{(XIII-49)}$$

$$\tilde{V}_{st} A^n = F_{st}^{n-(nb-1)} \tilde{V}_{st} A^{nb-1}, \quad n \geq m + nb - 1 \quad \text{(XIII-50)}$$

As equações descritas em **(XIII-49)** e **(XIII-50)** serão tratadas como propriedade 3 neste trabalho.

#### A-I.7. PROPRIEDADE 4

Substituindo a equação **(XIII-47)** na equação **(XIII-49)** e lembrando que a inversa da matriz  $V$  associada aos polos não estáveis pode ser decomposta em uma matriz dos polos integradores e outra dos não estáveis da planta, equação **(XIII-43)**, vem:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_i(k) \\ \tilde{V}_{un}(k) \end{bmatrix} A^n = \begin{bmatrix} I_{ny} & D \\ 0 & I_{nun} \end{bmatrix}^{n-(nb-1)} \begin{bmatrix} \tilde{V}_i(k) \\ \tilde{V}_{un}(k) \end{bmatrix} A^{nb-1} \quad \text{(XIII-51)}$$

A segunda equação representada na equação **(XIII-51)** é destacada na equação **(XIII-52)**.

$$\tilde{V}_{un}(k) A^n = \tilde{V}_{un}(k) A^{nb-1}, \quad n \geq m + nb - 1 \quad \text{(XIII-52)}$$

A equação **(XIII-52)** é tratada como propriedade 4 neste trabalho.

#### A-I.8. PROPRIEDADE 5

O *set point* definido por uma camada de otimização será aplicado às saídas do controlador. Pode-se definir um *set point* para o estado original conforme indicado em **(XIII-53)**.

$$x^{sp} = \begin{bmatrix} y^{sp} \\ \vdots \\ y^{sp} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{XIII-53})$$

Aplicando a transformação de estados indicada em **(XIII-36)** à definição de *set point* de estado da equação **(XIII-53)**:

$$z^{sp} = V_{in} x^{sp} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i \\ \tilde{V}_{un} \\ \tilde{V}_{st} \end{bmatrix} x^{sp} \rightarrow z^{sp} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i x^{sp} \\ \tilde{V}_{un} x^{sp} \\ \tilde{V}_{st} x^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ z_{un}^{sp} \\ z_{st}^{sp} \end{bmatrix} \quad (\text{XIII-54})$$

- $z_i^{sp}$  - Vetor de *set points* para os modos integradores do modelo no estado transformado  $z$
- $z_{un}^{sp}$  - Vetor de *set points* para os modos não estáveis do processo no estado transformado  $z$
- $z_{st}^{sp}$  - Vetor de *set points* para os modos estáveis do processo no estado transformado  $z$

Em regime permanente, pode-se afirmar que:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k) \rightarrow x^{sp} = Ax^{sp} \rightarrow (A - I_{nx})x^{sp} = 0 \quad (\text{XIII-55})$$

Escrevendo a equação **(XIII-55)** no espaço do estado transformado  $z$ , vem:

$$(A_d - I_{nz})z^{sp} = 0 \quad (\text{XIII-56})$$

Substituindo **(XIII-46)**, **(XIII-47)** e **(XIII-54)** em **(XIII-56)**:

$$\left( \begin{bmatrix} I_{ny} & D & 0 \\ 0 & I_{nun} & 0 \\ 0 & 0 & F_{st} \end{bmatrix} - I_{nz} \right) \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ z_{un}^{sp} \\ z_{st}^{sp} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{XIII-57})$$

Lembrando que a matriz  $D$  é composta por  $ny$  valores unitários em diagonal, conforme equação **(XIII-47)**, vem:

$$\begin{bmatrix} 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{st} - I_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ z_{un}^{sp} \\ z_{st}^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ 0 \\ (F_{st} - I_{ns}) z_{st}^{sp} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{XIII-58})$$

Os modos estáveis anulam-se no regime permanente, enquanto que os modos instáveis serão forçados a se anularem através de uma restrição acrescentada ao problema de otimização. Portanto:

$$z^{sp} = \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ z_{un}^{sp} \\ z_{st}^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i^{sp} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i x^{sp} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{XIII-59})$$

A correlação entre as saídas desejadas e o estado transformado pode ser vista nas equações (XIII-60) e (XIII-61).

$$y^{sp} = Cx^{sp} = CV_i z^{i,sp} = C_d^i z^{i,sp} \quad (\text{XIII-60})$$

$$z^{i,sp} = [C_d^i]^{-1} y^{sp} \quad (\text{XIII-61})$$

**XIV. ANEXO II - FLUXOGRAMA DO CONTROLADOR PREDITIVO  
MULTIVARIÁVEL DE HORIZONTE INFINITO  
CONSIDERANDO INCERTEZA NOS POLOS ESTÁVEIS E A  
EXISTÊNCIA DE POLOS INTEGRADORES**

---

**A-I.9. INTRODUÇÃO**

Este anexo é composto por um fluxograma onde o programa desenvolvido em Matlab é apresentado em blocos funcionais para apresentar ao leitor uma idéia do trabalho desenvolvido durante a etapa de programação. O fluxograma foi desenhado utilizando o software Visio.

